Modelo de Partones y QCD

Teoría Cuántica de Campos II

Luis Javier Tarrío Barreiro

Modelo de partones y QCD

Luis Javier Tarrío Barreiro

18 de julio de 2006

1. Introducción

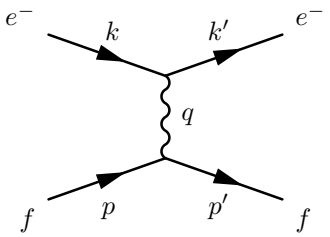
Hacia finales de la década de 1960 las interacciones electromagnéticas y de la fuerza débil se explicaban mediante el intercambio de bosones vectoriales entre fermiones. La electrodinámica cuántica (QED) tuvo tanto éxito en su poder predictivo que se tomó como modelo en posteriores explicaciones de las interacciones de la fuerza débil (y de la teoría electrodébil, que unifica QED y la fuerza débil), aunque se necesitó recurrir a la rotura espontánea de simetría para poder describir los bosones intermedios encontrados en el laboratorio: Z^0 y $W^{\pm}$. Esta rotura espontánea de simetría es fundamental para explicar las masas de estos bosones, ya que las ecuaciones dinámicas de éstos (en QED las ecuaciones de Maxwell) no permiten la existencia de masa para los bosones.

Sin embargo, no estaba claro que una teoría basada en el intercambio de bosones vectoriales se pudiese aplicar a la interacción fuerte. Esto ese debía en parte a la inexistencia de quarks (los fermiones de la teoría) libres; la existencia misma de los quarks no fue, por tanto, determinada por la observación de los mismos, surgieron como un modelo que explicaba los números cuánticos y el espectro de los hadrones. Otro inconveniente para aplicar una teoría con intercambio de bosones a la fuerza fuerte es el debido a que esas interacciones son muy intensas; no se podría aplicar la expansión en diagramas de Feynman ya que, como es un método perturbativo, requeriría una constante de acoplo pequeña. Si el acoplo es grande (como parecía el caso, ya que no se observaban quarks libres) entonces no se sabía si la serie llegaría a converger o, si lo hacía, cuántos diagramas harían falta.

Sin embargo surgió un hecho experimental que parecía solventar el problema de la intensidad de la fuerza, dando un apoyo inesperado a una teoría cuántica de campos con intercambio de bosones vectoriales, a saber, cuando la transferencia de momento entre una sonda electromagnética (típicamente un electrón o un muón) y el hadrón era grande, las interacciones fuertes parecían desaparecer. Esto era algo propuesto por Bjorken antes de la realización del experimento, aunque fue Feynman quien lo explicó, unos años más tarde.

2. Dispersión de un fermión mediante un electrón

Este es un diagrama que aparece varias veces a lo largo del trabajo y que se trata de una interacción de QED, con lo que se escribe aquí la solución a éste. La dispersión de un fermión mediante el intercambio de un fotón con un electrón viene dado, a primer orden, por el siguiente diagrama:



Tras calcular el elemento de matriz con las reglas de Feynman para QED se obtiene

$$\frac{1}{4}\left|M\right|^2 = \frac{8e^4Q_f^2}{t^2}\left(\frac{s^2+u^2}{4}\right), \tag{1}$$

donde $s = (k+p)^2 = 2k \cdot p$, $t = (k-k')^2 = -2k \cdot k' = q^2$ y $u = (k-p')^2 = -2k \cdot p'$ son las variables de Mandelstan, que cumplen $s + t + u = 0$ para partículas sin masa (aproximación ultrarrelativista). Integrando en espacio fase y expresándolo en función de las variables s, t y u tenemos

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2 Q_f^2}{s^2}\left(\frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2}\right). \tag{2}$$

Si queremos la sección eficaz total sólo tenemos que integrar en la variable t; expresándolo todo en función de las variables cinemáticas en el centro de masas (considerando el ángulo de dispersión respecto al haz incidente, energía y momentos iniciales), se obtiene

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3E^2}, \tag{3}$$

con $\alpha \approx 1/137$ la constante de estructura fina y E la energía en el centro de masas del sistema.

El proceso de QED estará presente en los cálculos de la cromodinámica cuántica (QCD) porque éstos sólo van a influír a la hora de determinar la influencia de los quarks que darán lugar a las reacciones, pero los procesos estudiados serán interacciones con leptones, que no sienten la interacción fuerte, con lo que los quarks interaccionarán electromagnéticamente con ellos.

3. Modelo de partones

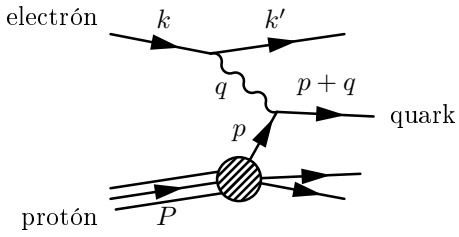
Este modelo surgió para explicar una predicción de Bjorken confirmada experimentalmente: que a altas energías las interacciones fuertes desaparecían y al explorar los hadrones con una sonda electromagnética, sin importar la energía inicial del electrón o muón contra el hadrón (siempre y cuando nos mantengamos en el régimen de altas energías), el resultado obtenido siempre era el mismo.

Las asunciones necesarias para explicar lo observado son (tomaremos siempre como sonda electromagnética un electrón y como hadrón de prueba un protón):

- El protón está compuesto por unos constituyentes, llamados partones, que interaccionan muy débilmente entre si.
- Los partones no pueden intercambiar entre ellos mucho momento mediante la interacción fuerte.
- Algunos de esos partones poseerán carga eléctrica, luego serán susceptibles de sufrir scattering con un electrón e incluso llegar a ser arrancados del protón si se le da la energía suficiente.

Este modelo se refiere siempre a *partones* como partes del hadrón a estudiar. No se le llama quarks porque en el momento en el que fue propuesto no estaba nada clara la existencia de éstos. Fue posteriormente, gracias a QCD, que se asoció a los partones con los quarks. Actualmente sabemos que en estos partones se deben incluír los quarks que forman el hadrón, posibles pares quark-antiquark que se formen al polarizar el vacio en su interior y los gluones que mantienen todo el hadrón cohesionado.

El diagrama que da cuenta del intercambio de un fotón entre el electrón y un partón del protón es el siguiente:



donde $q^2 = (k-k')^2 = t^2 < 0$ con t la variable de Mandelstan. Se suele trabajar con la variable $Q^2 = -q^2 > 0$ por ser definida positiva.

Feynman explicó el modelo de partones suponiendo que éstos portaban cada uno una fracción ξ del momento longitudinal del hadrón original, y que además no poseían ningún momento transverso en absoluto, en resumen:

	protón	*partón*
Energía	E	ξE
Momento	$\vec{P}$	$\vec{p} = \xi\vec{P}$
Masa	M	$m = \xi M$

donde la última fila viene dada por las otras dos mediante $m = \sqrt{\xi^2 E^2 - \xi^2 \vec{P}^2} = \xi M$.

Para cada partón tendremos una indeterminación en el momento dada por $\Delta p \approx \hbar/\Delta x$, donde Δx es del orden del tamaño del protón. Con dicha indeterminación no podremos saber nunca qué fracción de momento ξ lleva cada partón, pero sí podemos definir una distribución de probabilidad $f_i(\xi)dx$ (el subíndice i da cuenta de cada tipo de partón presente en el protón) de que esa fracción esté en la región $(\xi, \xi + d\xi)$, siendo una función a determinar mediante el experimento. Hay que explicitar que se está suponiendo que esta distribución f_i sólo depende de la fracción de momento que lleva el partón, algo que habrá que comprobar experimentalmente.

La cinemática del experimento nos da una relación entre la variable de Mandelstan $S = (P + k)^2$ que se refiere a la colisión entre el protón y el electrón y la variable $s = (p + k)^2$ que se refiere a la colisión entre el partón y el electrón

$$s = (p + k)^2 = 2p \cdot k = 2\xi P \cdot k = \xi S. \tag{4}$$

Además podemos encontrar una relación entre la fracción de momento ξ y el momento transferido por el electrón q^μ

$$0 \approx M^2_{quark} = (p + q)^2 = 2p \cdot q + q^2 = 2\xi P \cdot q - Q^2 \Rightarrow \xi = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \equiv x, \tag{5}$$

donde $\frac{Q^2}{2P\cdot q} \equiv x$ por definición de x.

De cada electrón dispersado se puede sacar Q^2 y x (conociendo k^μ y P^μ y midiendo k'^μ) y por tanto ya tenemos nuestra sección eficaz expresada en función de observables del experimento. Sumando a todos los partones y teniendo en cuenta las distribuciones de probabilidad para el momento de los mismos se obtiene, con la ecuación (2), lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dxdQ^2} &= \sum_i f_i(x) Q_i^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \frac{(P\cdot q)^2}{(P\cdot k)^2} \left(2\frac{Q^4 (P\cdot k)^2}{(P\cdot q)^2} + Q^4 - \frac{2Q^4 P\cdot k}{P\cdot q} \right) \frac{1}{Q^4} \\
&= \sum_i f_i(x) Q_i^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 + 1 + \frac{(P\cdot q)^2}{(P\cdot k)^2} - \frac{P\cdot q}{P\cdot k} \right) \\
&= \sum_i f_i(x) Q_i^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 + 1 + \frac{Q^4}{x^2 S^2} - \frac{Q^2}{xS} \right) \\
&= \sum_i f_i(x) Q_i^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 + \left(1 - \frac{Q^2}{xS} \right)^2 \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Si quisiésemos tener la sección eficaz diferencial dependiente tan sólo del cuadrimomento transferido por el electrón habría que integrar en x la expresión anterior, obteniendo

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int_0^1 \sum_i f_i(x) Q_i^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 + \left(1 - \frac{Q^2}{xS} \right)^2 \right) \theta(\xi S - Q^2) dx, \tag{7}$$

donde la función theta de Heaviside se refiere a la condición cinemática $E_{CM} \geq E_{trans}$ ($s \geq |t|$).

Volviendo a la ecuación (6) podemos dividir por con el factor electromagnético $\frac{(1+(1-Q^2/xs)^2)}{Q^4}$ y comprobamos que nos queda un valor constante. Eso es el llamado *scaling de Bjorken* y será cierto siempre y cuando las distribuciones de probabilidad de los partones no dependan del cuadrimomento transferido, ya que si lo hiciesen se encontraría que el cociente de la sección eficaz con el factor electromagnético si presentaría una dependencia con el valor de Q^2.

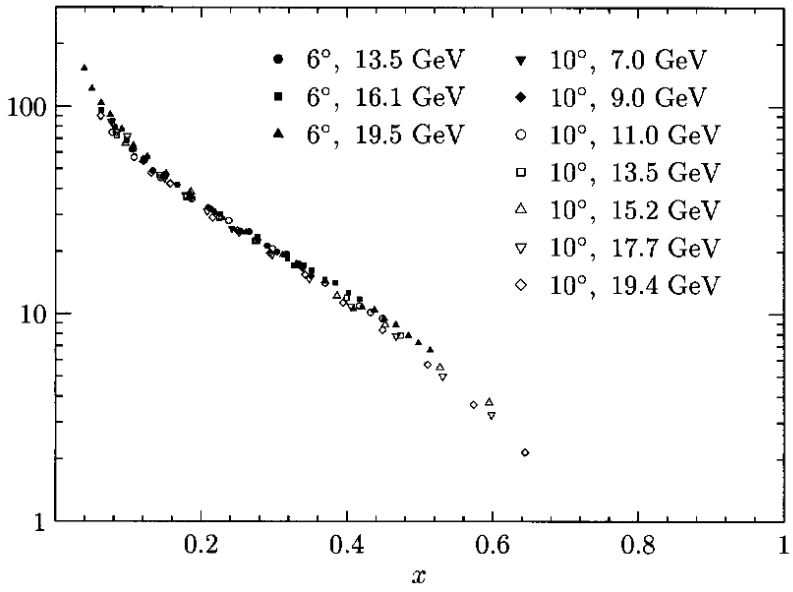


Figura 1: La ecuación (6) dividida por el factor $\frac{(1+(1-Q^2/xs)^2)}{Q^4}$, en función de x y a varias energías.

En la figura 1 vemos que experimentalmente parece existir el scaling de Bjorken (independencia del cociente antes descrito con Q^2) para distintos valores de la variable x. Por tanto, a altas energías (en el gráfico se muestran mayores que $7GeV$) se encuentra que la estructura del protón no varía ante una sonda electromagnética, sin importar la energía de ésta. Esto se debe a que el tiempo en el que ocurre el scattering es mucho menor que la escala de tiempos característica para la interacción entre partones del protón. En efecto, en el sistema en el que el protón está en reposo se tiene $q^0 = \frac{P\cdot q}{M_p} = \frac{Q^2}{2xM_p}$ para la energía intercambiada por medio del protón virtual. El tiempo de scattering será $\Delta t \approx \hbar/q^0 \ll \hbar/M_p$, siendo este último el tiempo característico de interacción entre partones.

Por tanto, Bjorken implica que en un proceso de scattering tan rápido se pueden ignorar los efectos de la interacción fuerte, es decir, los partones se pueden considerar libres en procesos a alta energía.

Es habitual trabajar con las variables x e $y \equiv \frac{P\cdot q}{P\cdot k}$ que son adimensionales y acotadas entre 0 y 1. En el sistema en el que el protón está en reposo se tiene que $y = q^0/k^0$ es la energía transferida del electrón incidente al sistema hadrónico. Para expresar la sección eficaz de la ecuación (6) tenemos que expresar las Q^2 como función de x e y

$$x \equiv \frac{Q^2}{2P\cdot q} \Rightarrow Q^2 = x2P\cdot q = xy2P\cdot k = xy(P+k)^2 = xyS, \tag{8}$$

de donde

$$d\xi dQ^2 = dxdQ^2 = dx\frac{dQ^2}{dy}dy = xSdxdy. \tag{9}$$

Expresado con las nuevas variables la ecuación (6) tenemos

$$\frac{d\sigma}{dxdy} = \left(\sum_i xf_i(x)Q_i^2\right)\frac{2\pi\alpha^2 S}{Q^4}\left(1+(1+y)^2\right), \tag{10}$$

donde el primer término entre paréntesis es un factor que depende únicamente de la composición del protón, independiente de los detalles del scattering, y el último término es la llamada *relación de Callan-Gross* en el scattering entre un electrón y un fermión.

4. Las funciones de distribución

Como el modelo de partones parece describir de forma aceptable las observaciones experimentales, se puede emplear para encontrar las funciones de distribución y aprender así algo sobre la estructura de los hadrones.

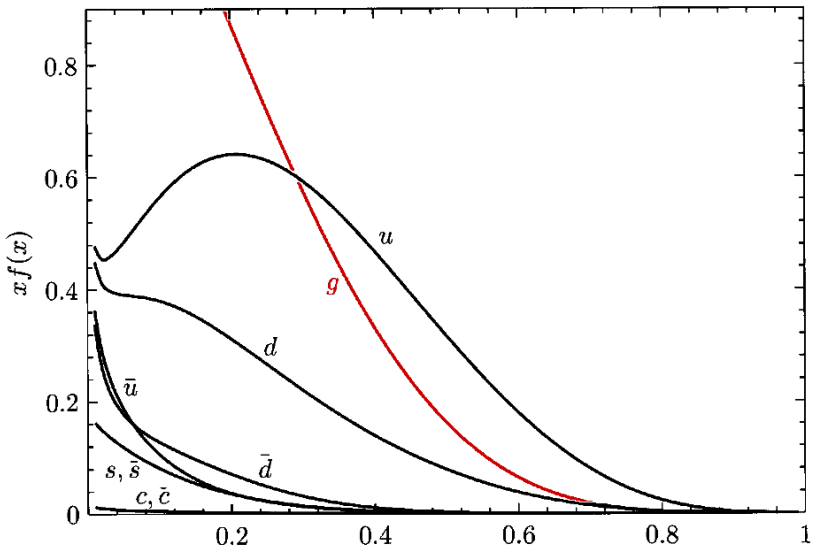


Figura 2: Funciones de distribución en el protón para diversos quarks y gluones.

Observando la figura 2 se ve que la mayor parte de la contribución al momento de un protón viene dada por los quarks u y d (los quarks más pesados t y b apenas contribuyen y no se incluyen en la figura), como era de esperar, ya que según el modelo de Gell-Man son los quarks principales en la estructura del protón. Las contribuciones de antiquarks y los quarks s y c viene dada por la polarización presente en el protón cuando investigamos su estructura más de cerca. La función de distribución de los gluones (que aún no fue introducida) se da aquí por completitud y vemos que también tiene mucha importancia a la hora de describir el protón (sobre todo cuando x es pequeño).

Como las distribuciones partónicas dan las probabilidades de encontrar los constituyentes de los hadrones, es natural normalizarlas de forma que cumplan

$$\int_0^1 dx\,[f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)] = 2, \tag{11}$$

$$\int_0^1 dx\,[f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)] = 1, \tag{12}$$

$$\int_0^1 dx\,[f_s(x) - f_{\bar{s}}(x)] = 0, \tag{13}$$

$$\int_0^1 dx\,[f_c(x) - f_{\bar{c}}(x)] = 0. \tag{14}$$

Además, ya que el momento total de los partones debe sumar lo mismo que el momento del hadrón, se tiene

$$\int_0^1 dx\,x\,[f_u(x) + f_{\bar{u}}(x) + f_d(x) + f_{\bar{d}}(x) + f_s(x) + f_{\bar{s}}(x) + f_c(x) + f_{\bar{c}}(x) + f_g(x)] = 1. \tag{15}$$

Además, de los experimentos se deduce

$$\int_0^1 dx\,x f_g(x) = \frac{1}{2}, \tag{16}$$

de donde se sabe que los gluones colaboran con la mitad del momento del protón, mientras que la otra mitad viene de la contribución de quarks y antiquarks.

5. Partones asintóticamente libres y QCD

El hecho de que se comprobase experimentalmente que la interacción fuerte desaparecía en procesos de alta energía fue desconcertante, ya que ninguna de las teorías cuánticas de campos conocidas en la fecha poseía una propiedad similar, todas veían aumentada la interacción a medida que aumentaba la energía. Fue mediante el uso de la renormalización cuando se demostró que teorías que mostraban esa propiedad (ser asintóticamente libres a pequeñas distancias, o lo que es lo mismo, altas energías) para sistemas de cuatro dimensiones eran las teorías gauge no abelianas. Fue este tipo de teorías la que permitió hacer un modelo basado de fermiones que intercambian bosones vectoriales para explicar la interacción fuerte, siendo no abelianos los bosones vectoriales.

Esa teoría se desarrolló pero no recuperó los resultados de Bjorken de forma exacta, aparecieron algunos términos correctivos ya que se calculó que la constante de acoplo no se llegaba a anular con ninguna transferencia de momento finita. Esto implica que siempre habrá alguna interacción entre los partones hadrónicos y que puede haber un intercambio alto de momento entre ellos.

A medida que se mejoró la precisión de los experimentos se comprobó que, de hecho, el scaling de Bjorken era violando. Esto implica que existe una dependencia (pequeña pero medible) de la distribución de probabilidad $f_i(x)$ con Q^2, situación que en el modelo de partones no se daba por construcción.

Ahora que ya se sabía que la interacción fuerte era una teoría gauge no abeliana había que buscar cuál de todo este conjunto de teorías era el modelo más apropiado para explicar las observaciones experimentales.

El modelo de quarks propuesto por Gell-Mann para explicar las propiedades de bariones y mesones presuponía una simetría interna para $SU(3)$ para los quarks, que se llamó simetría de color. Fue esta simetría $SU(3)$ la que se identificó con la simetría gauge no abeliana que se estaba buscando, y el desarrollo de la teoría dio lugar a la cromodinámica cuántica, siendo los gluones los cuantos asociados al campo gauge.

La QCD poseía la propiedad de la libertad asintótica por ser una teoría gauge no abeliana, y por tanto es tratable con un método perturbativo en el régimen de altas energías. A energías más bajas la constante de acoplo se hace muy grande y ese método no es aplicable, se tiene que recurrir a otros tratamientos como QCD en una red, que explica por qué los hadrones tienen que ser singletes de color o por qué no se observan quarks aislados.

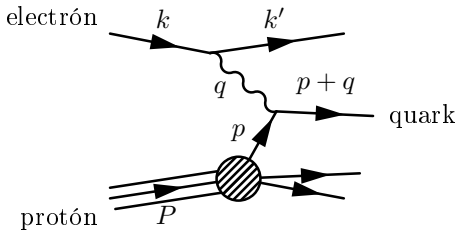
Nos centraremos en QCD a altas energías y su expansión en diagramas de Feynman, donde la constante de acoplo es pequeña gracias a la propiedad de libertad asintótica mencionada antes.

6. El modelo de partones y correcciones en QCD

A continuación se muestran algunos ejemplos de cómo se obtiene el modelo de partones en QCD (básicamente como orden más bajo en la serie de perturbaciones) y las correcciones que se deben hacer al modelo por el cambio en la constante de acoplamiento α_s con la escala de energía a la que se está trabajando y por la evolución de las funciones de distribución f_i con la misma escala de energía.

6.1. El modelo de partones como fórmula al orden más bajo

Aquí vamos a intentar derivar los resultados sin usar más asunciones que las propias de la aproximación perturbativa a una mecánica cuántica de campos. En este caso, el momento trasverso de los quarks es prácticamente nulo, ya que no son capaces de adquirirlo excepto a través del intercambio de un gluón duro, pero ese proceso está muy suprimido por la pequeñez de la constante de acoplo fuerte $\alpha_s(Q^2)$ a altas energías (hecho que se verá más adelante); por lo tanto, se puede asociar a cada quark un momento $p = \xi P$ con $0 \leq \xi \leq 1$. Tampoco se tienen en cuenta, a orden más bajo en α_S, la emisión o el intercambio de gluones durante la colisión. Para ello se utiliza la misma cinemática que la empleada para la deducción del modelo de partones



Las distribuciones de momento $f_i(\xi)$ no son computables en QCD porque dependen de procesos de intercambio de gluones blandos que determinan la estructura del protón a partir de la interacción entre quarks y gluones. Se introducen aquí como funciones a determinar por el experimento.

La sección eficaz total para el proceso inelástico de reacción dado por la figura superior recibe contribuciones de todos los partones presentes en el protón. Además, como cada partón va a estar ponderado con la función $f_i(\xi)$, es necesario integrar para todos los valores de ξ si no queremos dar un resultado diferencial. En definitiva se obtiene

$$\sigma(e^-(k)p(P) \to e^-(k')X) = \int_0^1 d\xi \sum_i f_i(\xi)\sigma(e^-(k)q_i(\xi P) \to e^-(k')q_i(p+q)), \tag{17}$$

donde lo hemos expresado en función de la sección eficaz total para la dispersión elástica de un quark y un electrón por medio de un fotón. Los distintos q_i que contribuyen son no sólo los tres quarks que componen el protón, también se deben tener en cuenta los pares quark-antiquark debidos a la polarización del vacío.

Esta ecuación es totalmente equivalente a la obtenida para el modelo de partones (ecuación (6)) como se puede comprobar fácilmente integrando aquella y utilizando la ecuación (3). Lo interesante de la deducción actual es que en este caso estamos trabajando, simplemente, a primer orden de un desarrollo perturbativo utilizando diagramas de Feynman; ahora habría que introducir correcciones debidas al intercambio de momento entre los quarks del protón mediante la interacción fuerte.

6.2. Creación de quark-antiquark y corrección a primer orden

Los diagramas a orden más bajo que contribuyen de alguna forma en el proceso mediante el cual un electrón y un positrón se aniquilan para dar un par quark-antiquark son los mostrados en la figura 3

En concreto, la figura 3(a) da el diagrama a orden α_s^0, coincidente con el cálculo realizado en QED pero con factores debidos al color

$$\sigma(e^+e^- \to hadrones) = 3\sum_i Q_i^2 \sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-), \tag{18}$$

donde la suma es sobre los distintos sabores de quarks y Q_i son las cargas de dichos quarks.

La extensión cuando α_s es pequeño (se verá más adelante cuándo es aplicable en la siguiente sección) se puede calcular la corrección a siguiente orden en α_s^1, que vendrá dada por una contribución de las figuras 3(b) y 3(c). En concreto, el orden α_s^1 recibe contribuciones del cuadrado del elemento de matriz de 3(b) y del término de interferencia entre 3(a) y 3(c).

Estos diagramas, al ser evaluados, presentan divergencias ultravioletas que deben ser eliminadas mediante la técnica de renormalización y divergencias infrarrojas que se cancelan entre los términos 3(b) y 3(c); éstas últimas son debidas a la emisión de gluones colineales con los quarks y hacen que quedarse únicamente con los términos 3(b) para calcular las correcciones dé resultados sin sentido.

Cuando se llevan a cabo los cálculos se obtiene un significado bastante simple

$$\boxed{\sigma(e^+e^- \to hadrones) = 3\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)\sum_i Q_i^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + O(\alpha_s^2)\right]}. \tag{19}$$

Se han realizado algunas medidas de la constante de acoplamiento α_s (con las complicaciones que trae al no ser siempre posible el hacer el estudio perturbativo de la teoría y tener que tener en

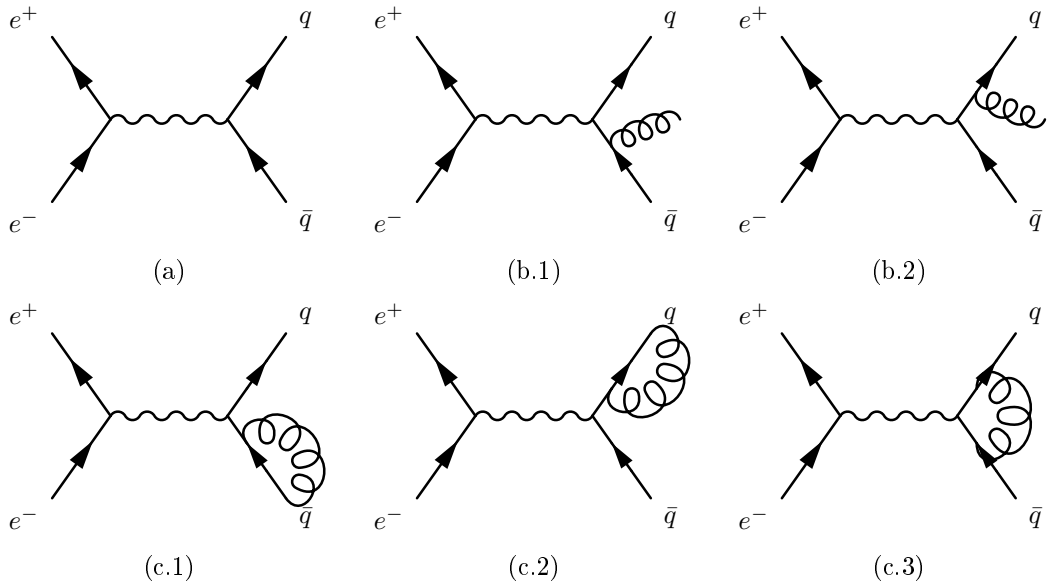


Figura 3: Diagramas necesarios para calcular la sección eficaz de creación de un quark y un antiquark a orden α_s

cuenta correcciones de alto orden). En el Peskin se da el gráfico de la figura 4, donde la constante de acoplamiento se determina tomando como escala de renormalización (ver sección siguiente) el valor de la misma en la masa del bosón Z^0, y se comparan con la predicción teórica (línea continua).

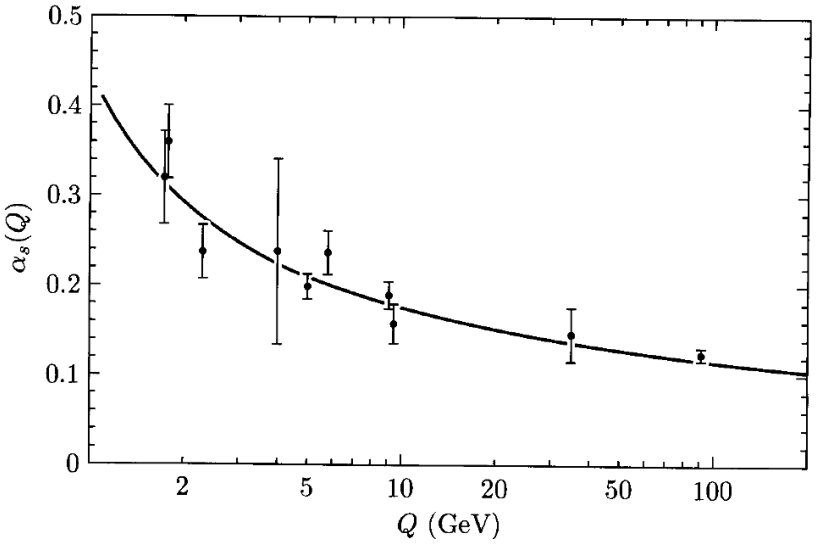


Figura 4: Medidas de α_s en función de la escala Q a la que se realizaron

6.3. La constante de acoplamiento dependiente de la energía

La fórmula (19) depende de la constante de acoplamiento de QCD α_s, que se debe definir en algún punto de renormalización M (al contrario que en QED, donde se emplease escoge el esquema en capa de masas para hacer la renormalización). Lo que se suele hacer es definir el valor de la constante

de acoplamiento cuando la escala de transferencias de momentos es grande, de forma que se puede trabajar con el método de perturbaciones (ya que la constante de acoplamiento es pequeña).

De la teoría general para teorías no abelianas se obtiene que la función β de QCD es (ecuación (16.135) del Peskin)

$$\beta(g_s) = -\frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right), \tag{20}$$

donde N_f es el número de quarks que hay en la teoría. Para ver cómo evoluciona la constante de acoplo utilizamos, conocida la función β, la ecuación diferencial del grupo de renormalización

$$\frac{d\bar{g}_s}{d\ln(Q/M)} = \beta(\bar{g}_s) = -\frac{\bar{g}_s^3}{(4\pi)^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right), \tag{21}$$

imponiendo que cuando $Q = M$ tengamos $\bar{g}_s = g_s$ se obtiene

$$\frac{1}{2\bar{g}_s^2} = \frac{\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)}{2(4\pi)^2}\ln(Q/M) + \frac{1}{2g_s}, \tag{22}$$

de donde

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(M^2)}{1 + \frac{\left(11-\frac{2}{3}N_f\right)}{4\pi}\alpha_S(M^2)\ln(Q^2/M^2)}. \tag{23}$$

De aquí podemos encontrar el valor de la constante de acoplamiento conocido $\alpha_s(M^2)$ a una escala M determinada. Es usual trabajar con una cantidad Λ definida para que cumpla

$$\frac{11 - \frac{2}{3}N_f}{4\pi}\alpha_s(M^2)\ln(\Lambda^2/M^2) = 1, \tag{24}$$

de forma que podemos expresar la ecuación (23) como

$$\boxed{\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\ln(Q^2/\Lambda^2)}}, \tag{25}$$

donde se ha quitado ya la barra de la constante de acoplamiento, que sólo indicaba que estaban evaluadas a diferentes escalas (lo cual se indica ahora explícitamente) y de modo que ahora sólo hay que conocer el valor del parámetro Λ a partir del experimento. Este parámetro nos dará la energía mínima a partir de la cual la teoría QCD empieza a ser tratable mediante métodos perturbativos. Según los experimentos con la sección eficaz estudiada en la sección anterior se obtiene $\Lambda \approx 200MeV$, con lo que la teoría de perturbaciones será adecuada cuando las energías involucradas sean del orden del GeV o mayores.

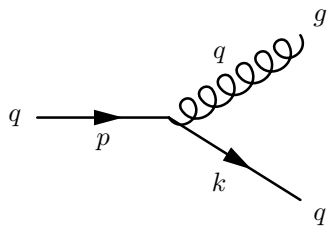
6.4. Dependencia con la energía de las funciones de distribución

Para calcular la dependencia con la energía de las funciones de distribución f_i vistas en el modelo de partones (aunque allí las suponíamos independientes de la escala energética, como aproximación) en el marco de QCD lo que hacemos es calcular la probabilidad que gobierna los procesos que llevan a los quarks y gluones a emitir otro gluón o quark; es decir, investigamos a menor escala (o mayor energía) los quarks y gluones, estudiando la posibilidad de que exista estructura interna. Veremos que cuando exploramos a mayor energía encontramos que los quarks y gluones parecen compuestos por más quarks y gluones (los partones estarían formados por partones), contribuyendo cada uno de ellos al momento total del hadrón involucrado, dando así una función de distribución que tiene que picar para x pequeño.

Una vez hecho el cálculo identificaremos las funciones de distribución en nuestras ecuaciones y encontraremos cómo evolucionan éstas con la energía (obteniendo las llamadas ecuaciones de Altarelli-Parisi). Al encontrar esta dependencia con la energía se da cuenta de una violación del scaling de Bjorken, que presuponía las funciones de distribución independientes de ella.

Quark emitiendo un quark y gluón

En esta parte damos los pasos comunes para encontrar las probabilidades de emisión de un gluón o un quark por parte de otro quark; para ello empleamos el diagrama que se indica en esta sección:



Aquí tenemos los cuadrimomentos

$$p = (p,0,0,p)\,, \tag{26}$$
$$q \approx (zp, p_\perp, 0, zp)\,, \tag{27}$$
$$k \approx ((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p))\,, \tag{28}$$

donde se ha aplicado conservación del cuadrimomento y se ha permitido un momento transversal pequeño para el quark saliente y el gluón. Se cumple $p^2+q^2+k^2=0$ a orden $p_\perp^2$ (despreciamos las masas).

Para el cálculo del elemento de matriz supondremos, en inicio, quarks polarizados a izquierdas (tanto el entrante como el saliente por conservación de la helicidad) y después generalizaremos a un quark sin polarizar mediante la simetría de paridad. El elemento de matriz es

$$iM = \bar{u}_L(k)(-ig_s\gamma_\mu t^a)u_L(p)\varepsilon_T^{*\mu}(q). \tag{29}$$

Si usamos la expresión de γ_μ en función de las matrices de Pauli y que

$$u_L(r) = \sqrt{2r^0}\begin{pmatrix}\xi(p)\\ 0\end{pmatrix}, \tag{30}$$

podemos escribir

$$iM = -ig_s t^a\sqrt{2(1-z)p}\sqrt{2p}\xi^\dagger(k)\sigma^i\xi(p)\varepsilon_T^{*i}(q). \tag{31}$$

Los espinores, a primer orden en $p_\perp$, son

$$\xi(p) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \xi(k) = \begin{pmatrix}\frac{p_\perp}{2(1-z)p}\\ 1\end{pmatrix}, \tag{32}$$

y los vectores de polarización del gluón

$$\varepsilon_L^{*i}(q) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1, i, -\tfrac{p_\perp}{zp}\right), \quad \varepsilon_R^{*i}(q) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1, -i, -\tfrac{p_\perp}{zp}\right), \tag{33}$$

por lo tanto podemos calcular el elemento de matriz para los procesos $q_L \to q_L\gamma_R$ y $q_L \to q_L\gamma_L$. Para el primero de ellos tenemos

$$\begin{aligned}
\xi^\dagger(k)\sigma^i\xi(p)\varepsilon_R^{*i} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^\dagger(k)\left(\sigma^1 - i\sigma^2 - \frac{p_\perp}{zp}\sigma^3\right)\xi(p) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^\dagger(k)\left(2\sigma^- - \frac{p_\perp}{zp}\sigma^3\right)\xi(p) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p}, 1\right)\left(2\sigma^- - \frac{p_\perp}{zp}\sigma^3\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \\
&= -\frac{p_\perp}{\sqrt{2}zp}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p}, 1\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{p_\perp}{\sqrt{2}zp},
\end{aligned} \tag{34}$$

de donde

$$iM(q_L \to q_L\gamma_R) = -ig_s t^a \frac{\sqrt{2(1-z)}}{z} p_\perp \tag{35}$$

y por lo tanto

$$|M|^2(q_L \to q_L\gamma_R) = g_s^2 tr[t^a t^a] p_\perp^2 \frac{2(1-z)}{z^2}. \tag{36}$$

En el caso de que el fotón esté polarizado a izquierdas tenemos algo similar, pero en este caso nos encontramos con el operador σ^+ en lugar del σ^-, el cual dará una contribución según

$$\begin{aligned}
\xi^\dagger(k)\sigma^i\xi(p)\varepsilon_L^{*i} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^\dagger(k)\left(\sigma^1 + i\sigma^2 - \frac{p_\perp}{zp}\sigma^3\right)\xi(p) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^\dagger(k)\left(2\sigma^+ - \frac{p_\perp}{zp}\sigma^3\right)\xi(p) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p}, 1\right)\left(2\sigma^+ - \frac{p_\perp}{zp}\sigma^3\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p}, 1\right)\begin{pmatrix} -\frac{p_\perp}{zp} & 2 \\ 0 & \frac{p_\perp}{zp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p}, 1\right)\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{p_\perp}{zp} \end{pmatrix} = \frac{p_\perp}{\sqrt{2}z(1-z)p}
\end{aligned} \tag{37}$$

y de aquí llegamos a

$$iM(q_L \to q_L\gamma_L) = -ig_s t^a \frac{\sqrt{2(1-z)}}{z(1-z)} p_\perp. \tag{38}$$

y por tanto

$$|M|^2(q_L \to q_L\gamma_L) = g_s^2 tr[t^a t^a] p_\perp^2 \frac{2(1-z)}{z^2(1-z)^2}. \tag{39}$$

La invarianza bajo transformaciones de paridad nos da las secciones eficaces para quarks a derechas:

$$iM(q_L \to q_L\gamma_R) = iM(q_R \to q_R\gamma_L), \quad iM(q_L \to q_L\gamma_L) = iM(q_R \to q_R\gamma_R), \tag{40}$$

esto nos permite computar el elemento de matriz al cuadrado total sumando los dos obtenidos antes multiplicados por dos (para tener en cuenta las polarizaciones de los quarks) y promediando con un factor $\frac{1}{2}$ para los espines y $\frac{1}{3}$ para los colores. Además se emplea que $\frac{1}{3}tr[t^a t^a] = \frac{4}{3}$, obteniendo así

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\sum |M|^2 = \frac{8g_s^2 p_\perp^2}{3z(1-z)}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]. \tag{41}$$

Quark radiando un gluón

Para la emisión por parte de un quark de un gluón (un proceso equivalente al bremsstrahlung en QED) tenemos que modificar las ecuaciones (27) y (28) de forma que $k^2 = 0$ por lo menos a orden $p_\perp^2$; para ello modificamos la expresión que nos da el momento lineal de las partículas, obteniendo

$$q = \left(zp, p_\perp, 0, zp + \frac{p_\perp^2}{2(1-z)p}\right), \tag{42}$$

$$k = \left((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p - \frac{p_\perp^2}{2(1-z)p}\right), \tag{43}$$

y así obtenemos, a orden $p_\perp^2$, $k^2 = 0$ y $q^2 = -\frac{{p_\perp}^2}{1-z}$.

Esto lo necesitamos para eliminar singularidades a la hora de computar la sección eficaz total para la reacción de un quark con una partícula X emitiendo un gluón y otra partícula Y, dada por

$$\sigma = \frac{1}{(1+v_X)2p2E_X}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k^0}\int d\prod_Y \left[\frac{1}{2}\frac{1}{3}\sum |M|^2\right]\left(\frac{1}{q^2}\right)^2 |M_{gX}|^2, \tag{44}$$

donde se distinguen los factores cinemáticos, de espacio fase y el elemento de matriz para el scattering del gluón por X. Esa integral es singular cuando los momentos del quark inicial y final son colineares ($q \to 0$), pero utilizando las expresiones anteriores para los cuadrimomentos y reescribiendo la integral como $d^3k = d^r k d^2k_\perp = pdz\pi dp_\perp^2$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int \frac{pdzdp_\perp^2}{16\pi^2(1-z)p}\left[\frac{1}{6}\sum|M|^2\right]\frac{z(1-z)^2}{(1+v_X)2zp2E_X}\int d\pi_Y|M_{gX}|^2 = \\
&= \int \frac{dzdp_\perp^2}{16\pi^2(1-z)}\left[\frac{1}{6}\sum|M|^2\right]\frac{z(1-z)^2}{p_\perp^4}\sigma(gX\to Y) = \\
&= \int \frac{dzdp_\perp^2}{16\pi^2}\frac{z(1-z)}{p_\perp^4}\frac{2g_s^2p_\perp^2}{z(z-z)}\frac{4}{3}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\sigma(gX\to Y) = \\
&= \int_0^1 dz\int\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2}\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\frac{4}{3}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\sigma(gX\to Y) = \\
&= \int_0^1 dz\frac{2\alpha_s(Q^2)}{3\pi}\log\left(\frac{s}{m^2}\right)\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\sigma(gX\to Y),
\end{aligned} \tag{45}$$

donde el logaritmo viene de la integración sobre $p_\perp^2$, que tenía por límite transferencias de momento de orden s hasta m^2, eliminando así la singularidad. Esta fórmula es importante porque tiene la misma forma que el modelo de partones, suponiendo la función de distribución

$$f_g(z) = \frac{2\alpha_s(Q^2)}{3\pi}\log\left(\frac{s}{m^2}\right)\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]. \tag{46}$$

Función de separación $P_{g\leftarrow q}$ (Splitting function)

Si exploramos un poco con la expresión

$$\sigma = \int_0^1 dz\int\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2}\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\frac{4}{3}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\sigma(gX\to Y), \tag{47}$$

podemos estudiar la emisión de gluones a través de quarks virtuales como un proceso continuo. Para ello le damos a las funciones de distribución una dependencia explícita en el momento transverso y definimos $f_g(x,Q)$ y $f_q(x,Q)$ como las funciones que dan la probabilidad de encontrar un gluón o un quark de fracción longitudinal para el quark x, teniendo en cuenta que $p_\perp < Q$. Si Q aumenta un infinitésimo ΔQ puede que un quark constituyente en $f_q(x,Q)$ radie un gluón con $Q < p_\perp < Q + \Delta Q$. La probabilidad diferencial, según se lee de (47), es

$$\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2}\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right], \tag{48}$$

y la nueva función de distribución del gluón cambia como

$$\begin{aligned}
f_g(x,Q+\Delta Q) - f_g(X,Q) &= \int_0^1 dx'\int_0^1 dz\frac{\Delta Q^2}{Q^2}\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]f_q(x',p_\perp)\delta(x-zx') = \\
&= \frac{\Delta Q}{Q}\int_x^1\frac{dz}{z}\left[\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]f_q(x/z,p_\perp).
\end{aligned} \tag{49}$$

Si pasamos a una evolución continua (haciendo $\Delta Q \to 0$) se encuentra la ecuación integro-diferencial siguiente

$$\frac{d}{d\log Q}f_g(x,Q) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}P_{g\leftarrow q}(z)f_q(x/z,Q), \tag{50}$$

que es una parte de una de las ecuaciones de Altarelli-Parisi, donde hemos definido

$$\boxed{P_{g\leftarrow q}(z) = \frac{4}{3}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]}. \tag{51}$$

Hay que decir que, aunque nos hemos centrado en un quark en concreto, esto es correcto para todos ellos, con lo cual, a la hora de escribir la ecuación de Altarelli-Parisi, habría que sumar sobre todas las clases de quarks (y antiquarks, que dan la misma contribución) para obtener una ecuación completa. También habría que incluir, en la ecuación integro-diferencial, un término que proviene de la posibilidad de que un gluón emita un gluón real. Esto es así porque, en QCD, estamos en una teoría no abeliana y existen interacciones entre los bosones intermediarios de la fuerza; en QED hay un término similar de fotón a fotón, pero sólo da cuenta de la propagación de un fotón mediante una función $\delta(1-z)$, en QCD ese término también existe, ya que se da la posibilidad de que el gluón continúe con todo su momento, pero habrá otros adicionales.

Quark emitiendo un gluón real

Para el caso en el que el quark emite un gluón real modificamos las ecuaciones (27) y (28) de forma similar a como hicimos con (42) y (43), pero de forma que tengamos $q^2 = 0$ a orden $p_\perp^2$, obteniendo

$$q = \left(zp, p_\perp, 0, zp - \frac{p_\perp^2}{2zp}\right), \tag{52}$$

$$k = \left((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p + \frac{p_\perp^2}{2zp}\right), \tag{53}$$

y así obtenemos, a orden $p_\perp^2$, $q^2 = 0$ y $k^2 = -\frac{{p_\perp}^2}{z}$.

Ahora la sección eficaz viene dada por

$$\sigma = \frac{1}{(1+v_X)2p2E_X}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2q^0}\int d\prod_Y \left[\frac{1}{2}\frac{1}{3}\sum |M|^2\right]\left(\frac{1}{k^2}\right)^2 |M_{qX}|^2, \tag{54}$$

con la singularidad, en este caso, cuando el gluón virtual y el quark inicial son colineales ($k \to 0$). Siguiendo los mismos pasos dados anteriormente se llega a

$$\sigma = \int_0^1 dz \int \frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2}\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\sigma(qX \to Y), \tag{55}$$

donde el quark intermedio lleva una fracción longitudinal $(1-z) \equiv x$. Finalmente obtenemos, similarmente a como se hizo antes, la siguiente función de estructura para el quark

$$f_q(z) = \frac{2\alpha_s(Q^2)}{3\pi}\log\left(\frac{s}{m^2}\right)\left[\frac{1+x^2}{1-x}\right]. \tag{56}$$

El problema con fórmula (56) es su singularidad cuando $x = 1$, es decir, no da cuenta de la posibilidad de que el quark continúe su camino sin radiar nada, lo cual lo modificaría mediante la introducción en los dos primeros órdenes en $\alpha_s(Q^2)$ de una función delta, quedando

$$f_q(z) = \delta(-x) + \frac{2\alpha_s(Q^2)}{3\pi}\log\left(\frac{s}{m^2}\right)\left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} - A\delta(1-x)\right], \tag{57}$$

donde la función $1/(1-x)_+$ está definida de la siguiente forma

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 \frac{f(x)-f(1)}{(1-x)}, \tag{58}$$

para eliminar divergencias en $x = 1$ y el factor que multiplica a la delta a orden $\alpha_s(Q^2)$ se halla mediante la condición

$$\begin{aligned}\int_0^1 dz\, z\,[P_{q\leftarrow q}(z) + P_{g\leftarrow q}(z)] = \int_0^1 dz\,\frac{4z}{3}\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} - A\delta(1-z) + \frac{1}{z} + \frac{(1-z)^2}{z}\right] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^1 dz\left[\frac{z+z^3-2}{1-z} + 1 + (1-z)^2\right] = A,\end{aligned} \tag{59}$$

obteniéndose así $A = -3/2$ (esta condición se utiliza para garantizar que el momento total del protón no varía con el tiempo, aunque no se demuestra).

Con esto, aunque la función de estructura para el quark siga siendo singular a $x = 1$, está correctamente normalizada dando $\int_0^1 f_q(x) = 1$.

Función de separación $P_{q\leftarrow q}$

Del mismo modo que se hizo anteriormente para el caso en el que se emitía un quark real, ahora podemos ver cómo evoluciona la función de estructura del quark por la emisión de un gluón real a partir de un quark (y posteriormente habrá que añadir el caso de emisión por parte de un gluón. Siguiendo exactamente los mismos pasos que antes se llega finalmente a

$$\frac{d}{d\log Q} f_q(x,Q) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \int_z^1 \frac{dz}{z} P_{q\leftarrow q}(z) f_q(x/z,Q), \tag{60}$$

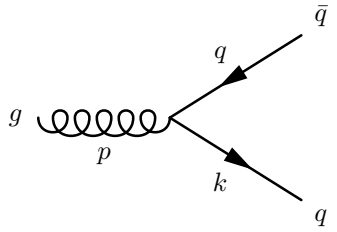
donde

$$\boxed{P_{q\leftarrow q}(z) = \frac{4}{3}\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z)\right]}. \tag{61}$$

Aquí no habría que sumar a todos los (anti)quarks, ya que ahora estamos teniendo en cuenta la función de estrucutura a un quark determinado, y no como antes, que teníamos contribuciones de todo el colectivo de quarks para la función de estructura de los gluones.

Creación de una pareja quark-antiquark por un gluón

Ahora consideramos el diagrama



con los cuadrimomentos

$$p = (p,0,0,p)\,, \tag{62}$$
$$q \approx (zp, p_\perp, 0, zp)\,, \tag{63}$$
$$k \approx ((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p))\,. \tag{64}$$

Suponiendo que el quark saliente es a izquierdas (y por tanto el antiquark a derechas) tenemos

$$iM = \bar{u}_L(k)(-ig_s\gamma_\mu t^a)v_L(q)\varepsilon_T^\mu(p). \tag{65}$$

Si usamos la expresión de γ_μ en función de las matrices de Pauli y que

$$u_L(r) = \sqrt{2r^0}\begin{pmatrix} \xi(p) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{66}$$

podemos escribir

$$iM = -ig_s t^a \sqrt{2(1-z)p}\sqrt{2p}\xi^\dagger(k)\sigma^i\xi(q)\varepsilon_T^i(p). \tag{67}$$

Los espinores, a primer orden en $p_\perp$, son

$$\xi(q) = \begin{pmatrix} \frac{-p_\perp}{2zp} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi(k) = \begin{pmatrix} \frac{p_\perp}{2(1-z)p} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{68}$$

y los vectores de polarización del gluón real incidente

$$\varepsilon_L^i(q) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0)\,, \quad \varepsilon_R^i(q) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)\,, \tag{69}$$

por lo tanto podemos calcular el elemento de matriz para los procesos $g_L \to q_L\bar{q}_R$ y $g_R \to q_L\bar{q}_R$. Para el primero de ellos tenemos

$$\begin{aligned}
\xi^\dagger(k)\sigma^i\xi(p)\varepsilon_L^i &= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^\dagger(k)\left(\sigma^1 - i\sigma^2\right)\xi(q) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^\dagger(k)\left(2\sigma^-\right)\xi(q) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p},1\right)\left(2\sigma^-\right)\begin{pmatrix}\frac{-p_\perp}{2zp}\\ 1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p},1\right)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-p_\perp}{2zp}\\ 1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p},1\right)\begin{pmatrix}0\\ \frac{-p_\perp}{zp}\end{pmatrix} = \\
&= -\frac{p_\perp}{\sqrt{2}zp}
\end{aligned} \tag{70}$$

de donde

$$iM(g_L \to q_L\bar{q}_R) = ig_s t^a \frac{\sqrt{2(1-z)z}}{z}p_\perp \tag{71}$$

y por lo tanto

$$|M|^2(g_L \to q_L\bar{q}_R) = g_s^2 tr[t^a t^a]p_\perp^2\frac{2(1-z)}{z}. \tag{72}$$

En el caso de que el gluón esté polarizado a derechas tenemos algo similar, pero en este caso nos volvemos a encontrars con el operador σ^+ en lugar del σ^-, quedando

$$\begin{aligned}
\xi^\dagger(k)\sigma^i\xi(p)\varepsilon_R^i &= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^\dagger(k)\left(\sigma^1 + i\sigma^2\right)\xi(q) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^\dagger(k)\left(2\sigma^+\right)\xi(q) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p},1\right)\left(2\sigma^+\right)\begin{pmatrix}\frac{-p_\perp}{2zp}\\ 1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p},1\right)\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-p_\perp}{2zp}\\ 1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_\perp}{2(1-z)p},1\right)\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix} = \\
&= \frac{p_\perp}{\sqrt{2}(1-z)p}
\end{aligned} \tag{73}$$

y de aquí llegamos a

$$iM(g_R \to q_L\bar{q}_L) = -ig_s t^a \frac{\sqrt{2(1-z)z}}{(1-z)}p_\perp. \tag{74}$$

y por tanto

$$|M|^2(g_R \to q_L\bar{q}_L) = g_s^2 tr[t^a t^a]p_\perp^2\frac{2z}{(1-z)}. \tag{75}$$

Para computar el elemento de matriz promediamos con un factor $\frac{1}{2}$ para la polaridad del gluón y $\frac{1}{8}$ para los colores del gluón incidente. Además se emplea que $\frac{1}{8}tr[t^a t^a] = \frac{1}{2}$, obteniendo así

$$\frac{1}{2}\frac{1}{8}\sum|M|^2 = \frac{g_s^2 p_\perp^2}{z(1-z)}\left[z^2 + (1-z)^2\right]. \tag{76}$$

Función de separación $P_{q\leftarrow g}$

Consideramos ahora la contribución del vértice que estamos estudiando a la función de estructura de un gluón. Ahora el equivalente a la ecuación (48) es

$$\frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi}\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2}\left[z^2+(1-z)^2\right], \tag{77}$$

lo que nos da

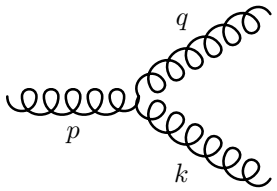
$$\frac{d}{d\log Q}f_q(x,Q)=\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}P_{q\leftarrow q}(z)f_g(x,Q), \tag{78}$$

donde

$$\boxed{P_{q\leftarrow g}(z)=\frac{1}{2}\left[z^2+(1-z)^2\right]}. \tag{79}$$

Gluón radiando un gluón

Este proceso (al contrario que los otros tres) no tiene análogo en QED. En esta ocasión tenemos el diagrama con tres gluones



con los cuadrimomentos dados de manera aproximada (a primer orden en $p_\perp$) por

$$\begin{aligned} p &= (p,0,0,p), && (80)\\ q &\approx (zp,p_\perp,0,zp), && (81)\\ k &\approx ((1-z)p,-p_\perp,0,(1-z)p)). && (82)\end{aligned}$$

Los vectores de polarización son para los tres gluones los siguientes

$$\varepsilon_R(p)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0) \qquad \varepsilon_L(p)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0), \tag{83}$$

$$\varepsilon_R^*(q)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1,-i,-\tfrac{p_\perp}{zp}\right) \quad \varepsilon_L^*(q)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,i,-\frac{p_\perp}{zp}\right), \tag{84}$$

$$\varepsilon_R^*(k)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1,-i,\tfrac{p_\perp}{(1-z)p}\right) \quad \varepsilon_L^*(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,i,\frac{p_\perp}{(1-z)p}\right). \tag{85}$$

El elemento de matriz del diagrama viene dado por (véase fórmula A.11 del Peskin)

$$iM=g_sf_{abc}\left[-g^{\mu\nu}(q+p)^\lambda+g^{\nu\lambda}(p+k)^\mu+g^{\lambda\mu}(q-k)^\nu\right]\varepsilon_\nu(p)\varepsilon_\mu^*(q)\varepsilon_\lambda^*(k), \tag{86}$$

donde las contracciones entre las sumas de cuadrimomentos y los vectores de polarización resultan independientes de la helicidad de los gluones, resultando

$$\begin{aligned}(q+p)\cdot\varepsilon^*(k) &= \sqrt{2}p_\perp\frac{1}{1-z}, && (87)\\ (p+k)\cdot\varepsilon^*(q) &= -\sqrt{2}p_\perp\frac{1}{z}, && (88)\\ (q-k)\cdot\varepsilon(p) &= \sqrt{2}p_\perp. && (89)\end{aligned}$$

Las contracciones entre los propios vecores de polarización sí que presentan dependencia con la helicidad de los gluones, obteniéndose

$$\begin{aligned}
\varepsilon_R(p)\cdot\varepsilon_R^*(q) &= \varepsilon_R(p)\cdot\varepsilon_R^*(k)=1, && (90)\\
\varepsilon_R(p)\cdot\varepsilon_L^*(q) &= \varepsilon_R(p)\cdot\varepsilon_L^*(k)=0, && (91)\\
\varepsilon_R^*(q)\cdot\varepsilon_R^*(k) &= \varepsilon_L^*(q)\cdot\varepsilon_L^*(k)=0+O(p_\perp^2), && (92)\\
\varepsilon_R^*(q)\cdot\varepsilon_L^*(k) &= \varepsilon_L^*(q)\cdot\varepsilon_R^*(k)=1+O(p_\perp^2). && (93)
\end{aligned}$$

Como antes, nos centramos en procesos de helicidad definida y consideramos sólo los procesos $g_R \to g_R g_R$, $g_R \to g_R g_L$, $g_R \to g_L g_R$, $g_R \to g_L g_L$, siendo los cuatro restantes con helicidad a izquierdas del gluón inicial equivalentes a estes por simetría. Con lo visto anteriormente es inmediato obtener

$$\begin{aligned}
iM(R\to RR) &= -\sqrt{2}g_s f_{abc}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right)p_\perp, && (94)\\
iM(R\to RL) &= -\sqrt{2}g_s f_{abc}\left(\frac{1}{1-z}-1\right)p_\perp, && (95)\\
iM(R\to LR) &= -\sqrt{2}g_s f_{abc}\left(\frac{1}{z}-1\right)p_\perp, && (96)\\
iM(R\to LL) &= 0. && (97)\\
& && (98)
\end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta todas las combinaciones de helicidades de los gluones y promediando en polaridad y color para el gluón incidente tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{1}{8}\sum|M|^2=\frac{\alpha_s^2 f_{abc}f_{abc}p_\perp^2}{8\pi z(1-z)}\left[\frac{1-z}{z}+\frac{z}{1-z}+z(1-z)\right], \qquad (99)$$

si ponemos $\sum\limits_{a,b,c} f_{abc}f_{abc}=24$ nos queda

$$\frac{1}{2}\frac{1}{8}\sum|M|^2=\frac{12\alpha_s^2 p_\perp^2}{4\pi z(1-z)}\left[\frac{1-z}{z}+\frac{z}{1-z}+z(1-z)\right]. \qquad (100)$$

Función de separación $P_{g\leftarrow g}$

Ahora el equivalente a la ecuación (48) es

$$\frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi}\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2}12\left[\frac{1-z}{z}+\frac{z}{1-z}+z(1-z)\right], \qquad (101)$$

de donde

$$P_{g\leftarrow g}(z)=6\left[\frac{1-z}{z}+\frac{z}{1-z}+z(1-z)\right], \qquad (102)$$

donde de nuevo se encuentran singularidades al integrar esa función entre 0 y 1 que deben ser tratadas de modo análogo a cómo hicimos con $P_{q\leftarrow q}(z)$. De ese modo utilizamos la función $1/(1-z)_+$ y encontramos una función delta con un factor multiplicándola que tenemos que calcular mediante la condición

$$\int_0^1 dz\, z\,(2n_f P_{q\leftarrow g}(z)+P_{g\leftarrow g}(z))=0, \qquad (103)$$

que garantiza, al igual que en la condición utilizada anteriormente, que el momento total del protón no varía. El factor $2n_f$ viene de considerar todas las parejas quark-antiquark existentes en la teoría.

La constante que acompaña a la delta se obtiene mediante

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz\, z\,[2n_f P_{q\leftarrow g}(z) + P_{g\leftarrow g}(z)] = \\
&\quad = \int_0^1 dz\, z\left[n_f\left(z^2+(1-z)^2\right) + 6\left(\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) - A\delta(1-z)\right)\right] = 0 \Rightarrow \qquad (104)\\
&\quad \Rightarrow \int_0^1 dz\, z\left[n_f\left(z^2+(1-z)^2\right) + 6\left(\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z)\right)\right] = 6A.
\end{aligned}$$

Haciendo la integral, aplicando que $\frac{z^2}{(1-z)_+} = \frac{z^2-1}{1-z}$ se obtiene $A = \frac{n_f}{18} - \frac{11}{12}$, con lo que la ecuación (102) se modifica a

$$\boxed{P_{g\leftarrow g}(z) = 6\left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) + \left(\frac{11}{12} - \frac{n_f}{18}\right)\delta(1-z)\right]}. \qquad (105)$$

Ecuaciones de Altarelli-Parisi

Si hacemos un compendio de lo visto en la última sección, agrupando todos los factores que contribuyen a la evolución de las funciones para quarks y gluones en los hadrones, obtenemos las llamadas *ecuaciones de Altarelli-Parisi*, que describen mediante un conjunto de ecuaciones integro-diferenciales acopladas la evolución de las distribuciones partónicas para cada sabor de (anti)quark y los gluones

$$\boxed{\frac{d}{d\log Q} f_g(x,Q) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\left[P_{g\leftarrow q}(z)\sum_i f_i(x/z,Q) + P_{g\leftarrow g} f_g(x/z,Q)\right]}, \qquad (106)$$

$$\boxed{\frac{d}{d\log Q} f_i(x,Q) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\left[P_{q\leftarrow q}(z) f_i(x/z,Q) + P_{q\leftarrow g} f_g(x/z,Q)\right]}, \qquad (107)$$

donde el índice i vale para todos los sabores de quarks y antiquarks. Las funciones que dan cuenta de la contribución de (anti)quarks y gluones a la ecuación para la función de distribución de (anti)quarks y gluones son

$$\begin{aligned}
P_{q\leftarrow q}(z) &= \frac{4}{3}\left[\frac{(1+z)^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z)\right], && (108)\\
P_{g\leftarrow q}(z) &= \frac{4}{3}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right], && (109)\\
P_{q\leftarrow g}(z) &= \frac{1}{2}\left[z^2+(1-z)^2\right], && (110)\\
P_{g\leftarrow g}(z) &= 6\left[\frac{(1-z)}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) + \left(\frac{11}{12} - \frac{n_f}{18}\right)\delta(1-z)\right]. && (111)
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones predicen una evolución de las funciones de distribución partónicas muy característica y un ejemplo a distintas energías se puede ver en la figura 5. Los partones con x grande tienden a radiar a valores menores de x cuando aumenta la energía. En la figura 6 se ve la evolución de una variable que depende de las funciones de distribución respecto a Q^2, comparado con un modelo que evoluciona de acuerdo con las ecuaciones de Altarelli-Parisi; los datos parecen coincidir bien.

Estas ecuaciones también predicen que cuanto más aumenta Q^2 (es decir, cuanto más pequeña es la escala a la que estamos estudiando el hadrón) las distribuciones de partones aumentan rápidamente a x pequeño. Esto se puede entender como un hadrón que tiene cada vez más y más constituyentes compartiendo el momento total a medida que investigamos a menores escalas.

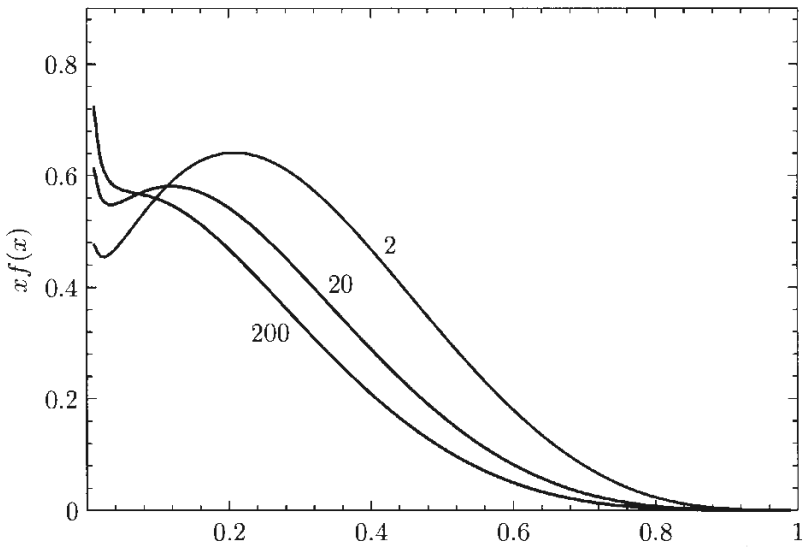


Figura 5: La función de distribución para el quark u (multiplicada por x) a tres energías distintas, dadas en GeV.

7. Proceso de Drell-Yan

El cálculo a orden más bajo de este proceso se da aquí como ejemplo ilustrativo de cómo las funciones de distribución partónicas $f_i(\xi, Q^2)$ estudiadas antes entran en juego en las interacciones de QCD.

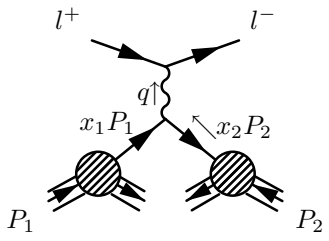
Si hacemos colisionar hadrones a muy alta energía, la mayor parte de las colisiones involucrarán sólo transferencias pequeñas de momento entre quarks y gluones, pero algunas de ellas involucrarán transferencias de alta energía y momento, con lo cual se puede emplear el método perturbativo para el estudio de éstas, introduciendo para ello las funciones de distribución partónicas estudiadas anteriormente. Se debería encontrar una fórmula similar a la del modelo de partones a orden dominante.

Para el caso del choque de dos protones en los que interacciona un quark y un antiquark la precición a orden dominante de QCD es muy similar a la obtenida para el modelo partones, teniendo en cuenta la existencia ahora de dos partones (uno en cada protón)

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2}\left(p\left(P_1\right)+p\left(P_2\right)\rightarrow Y+X\right)=\sum_i f_i\left(x_i,Q^2\right) f_{\bar{i}}\left(x_i,Q^2\right)\sigma\left(q_i\left(x_1P_1\right)+\bar{q}_i\left(x_2P_2\right)\rightarrow Y\right), \quad (112)$$

donde Y es un par de leptón y antileptón, X un estado hadrónico, x_i son fracciones de distribución de momento y $f_q(x_i, Q^2)$ funciones de distribución del quark q, dependiente de la energía de la reacción y de la fracción de momento.

Podemos estudiar la reacción esquematizada en la figura siguiente:



Básicamente aquí tenemos la misma reacción que en el modelo de partones (o que en el proceso $q\bar{q}\rightarrow l^+l^-$) con los momentos de los quarks dados por las distribuciones de probabilidad partónicas

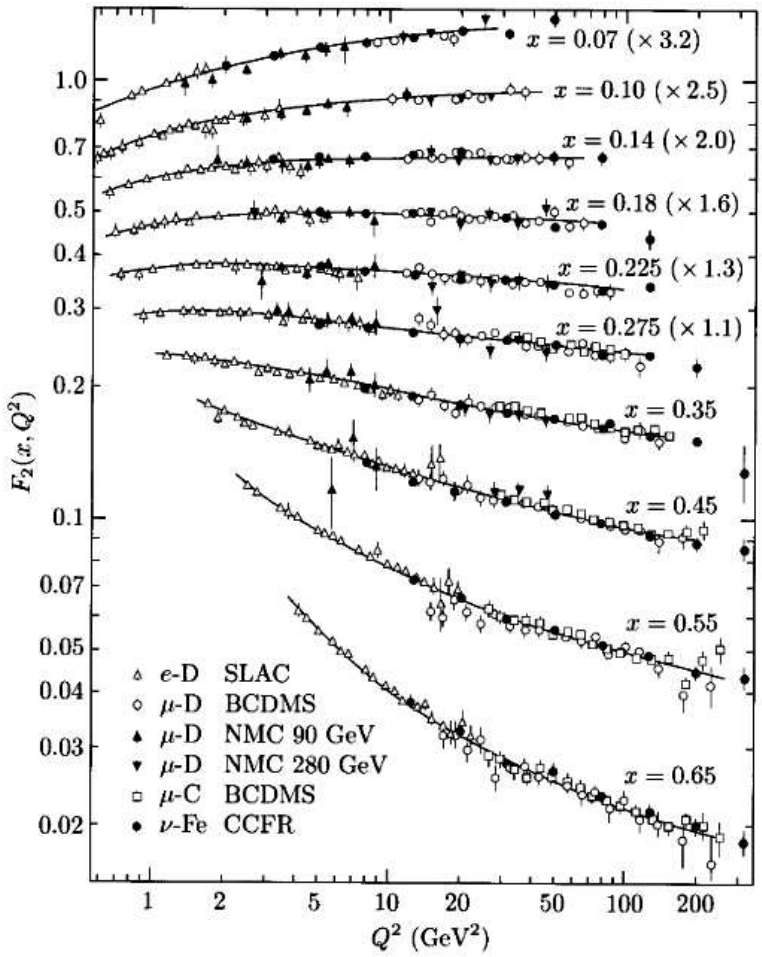


Figura 6: Dependencia con Q^2 de la función $\sum_f xQ_f^2 f_f(x, Q^2)$ para diversos valores de x.

de los mismos dentro de su respectivo protón. La única diferencia a añadir en la sección eficaz (3) son dos factores 1/3 debido al promedio en la carga de color de los dos quarks iniciales. Con esto

$$\sigma(q_i\bar{q}_i \to l^+l^-) = \frac{1}{3}Q_i^2\frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \tag{113}$$

donde las variables cinemáticas son las que se estudian aquí, y dependerán de las funciones de distribución partónicas.

Trabajaremos en el centro de masas de los dos protones iniciales y con dos variables que introducimos ahora. La primera de ellas es el cuadrado de la masa invariante del proceso ($M^2 = q^2$), que se puede calcular fácilmente midiendo el cuadrimomento de los dos leptones expulsados en el mismo; en general esperamos que los partones iniciales transfieran poco momento transverso, pero sí una gran cantidad de momento longitudinal. La otra cantidad a usar será la rapidez (Y) del fotón virtual, que en el sistema de centro de masas de los protones se define como $q^0 = M\cosh Y$.

La cinemática del proceso de Drell-Yan para los protones es

$$P_1 = (E, 0, 0, E), \tag{114}$$
$$P_2 = (E, 0, 0, -E), \tag{115}$$

de donde, como el momento transverso es pequeño, podemos escribir

$$q = x_1P_1 + x_2P_2 = ((x_1 + x_2)E, 0, 0, (x_1 - x_2)E)\,, \tag{116}$$

con lo que $M^2 = q^2 = 4x_1x_2E^2$.

Además, para la rapidez, tenemos

$$q^0 = M\cosh Y \Rightarrow \cosh Y = \frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right), \tag{117}$$

de donde, por la definición del coseno hiperbólico, $e^Y = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$.

Con estas ecuaciones podemos escribir las fracciones de momento x_1 y x_2 en función de las cantidades observables M, Y y E, quedando

$$x_1 = \frac{M}{2E}e^Y, \tag{118}$$

$$x_2 = \frac{M}{2E}e^{-Y}, \tag{119}$$

lo que nos permite escribir, finalmente, la sección efical diferencial final (112) como

$$\frac{d\sigma}{dM^2dY}(pp \to e^+e^- + algo) = \sum_i f_i\left(\frac{M}{2E}e^Y, Q^2\right) f_{\bar{i}}\left(\frac{M}{2E}e^{-Y}, Q^2\right)\frac{Q_i^2}{3}\frac{4\pi\alpha^2}{3\cdot 4M^2E^2}. \tag{120}$$

El problema es que esta fórmula no puede ser comprobada con el experimento, ya que se deben tener en cuenta correcciones a orden mayor en α_s y α que no son despreciables en absoluto.