

# Efecto Casimir

José Adrián Castelo Martínez;  
Universidad de Murcia, España

## Resumen

Cuando se tratan los campos como conjuntos de osciladores armónicos acoplados, resulta que la energía del estado fundamental o estado de vacío (en el que ningún modo está excitado) es infinita. Previo a las técnicas de renormalización, Casimir dio una prueba de un fenómeno en el que la energía del punto cero sería observable y tendría efectos medibles. En este trabajo haremos una introducción al fenómeno; expondremos por qué el campo electromagnético puede considerarse (desde un punto de vista de la mecánica cuántica no relativista incluso) como un conjunto de osciladores acoplados; explicaremos el efecto Casimir de la manera en la que él lo hizo en su famoso artículo y veremos a qué verificaciones experimentales se le ha sometido<sup>1</sup>.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. QED y el efecto Casimir</b>	<b>2</b>
2.1. El campo electromagnético como una colección de osciladores armónicos . . . . .	3
2.2. Cuantización canónica . . . . .	4
2.3. Operadores creación y destrucción . . . . .	5
<b>3. Cálculo de la interacción</b>	<b>5</b>
3.1. Casimir y Van der Waals . . . . .	8
3.2. No siempre atractiva . . . . .	8
<b>4. Verificaciones experimentales</b>	<b>9</b>
4.1. Demasiado ideal . . . . .	9
4.2. Añadiendo correcciones . . . . .	9

---

<sup>1</sup>Este trabajo es de corte técnico. Para un artículo divulgativo pero fundamentado sobre el efecto Casimir ver la referencia [1], de la cual se han sacado los puntos históricos incluidos en este trabajo. En tal artículo también se discute el efecto Casimir dinámico, la posibilidad de que el efecto Casimir realmente no sea una confirmación de la energía del vacío, incluso se discute la posibilidad de que la expansión acelerada del universo sea explicable en términos de un “efecto Casimir” a nivel cosmológico.

## 1. Introducción

El 29 de mayo de 1948 Casimir presentó su manuscrito del artículo “On the attraction between two perfectly conducting plates” (ver la referencia [2]) a la sesión de la Real Academia Holandesa de Artes y Ciencias, el cual fue publicado en la revista de la asociación ese mismo año. Tal artículo comenzaba:

*“In a recent paper by POLDER and CASIMIR it is shown that the interaction between a perfectly conducting plate and an atom or molecule with a static polarizability  $\alpha$  is in the limit of large distances  $R$  given by*

$$\delta E = -\frac{3}{8\pi}\hbar c \frac{\alpha}{R^4}$$

*and that the interaction between two particles with static polarizabilities  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  is given in that limit by*

$$\delta E = -\frac{23}{4\pi}\hbar c \frac{\alpha_1\alpha_2}{R^7}$$

*These formulae are obtained by taking the usual VAN DER WAALS-LONDON forces as a starting point and correcting for retardations effects. [...] the present author was able to show that these expressions may also be derived through studying by means of classical electrodynamics the change of electromagnetic zero point energy ”*

Que Casimir descubriera su (homónimo) efecto tras haber estudiado tales problemas se debe a que; como confesara a Peter Milonni en 1992, lo descubrió como un subproducto de la investigación aplicada que llevaba a cabo para el *Philips Physics Laboratory* (de la empresa holandesa *Philips*): la estabilidad de las suspensiones coloidales que se empleaban en las películas que se depositaban sobre las lámparas al uso y tubos de rayos catódicos.

Overbeek y Verwey habían desarrollado (en el mismo laboratorio) una teoría que intentaba explicar la estabilidad de las suspensiones de polvo de cuarzo, la cual no parecía correcta experimentalmente. Debía ocurrir que la interacción decayera más deprisa que lo que la interacción Van Der Waals dictaba: como  $r^{-7}$  en lugar de  $r^{-6}$ . Overbeek aventuró que podía deberse a la velocidad finita de propagación de la luz, como vemos que se menciona en la cita del artículo de Casimir.

Tras ello, Casimir se propuso profundizar en el tema. Mantuvo en otoño de 1947 una conversación con el físico danés Bohr, el cual sugirió que podría tener que ver con la energía de punto cero del vacío. Casimir debió darse cuenta de que en efecto, podría interpretarse como una variación de la energía del punto cero. Y aquí retomamos el inicio de esta sección; con la presentación de su artículo y la cita reseñada.

## 2. QED y el efecto Casimir

En esta sección trataremos de dar la argumentación de por qué podemos entender el campo electromagnético en términos de osciladores armónicos. Nos guiaremos prácticamente por la referencia [3].

El primer paso en la formulación de una teoría cuántica para el campo electromagnético fue el dado por Planck en 1900, que para explicar el espectro de la radiación electromagnética en equilibrio térmico con las paredes de la cavidad que la contiene, asumió que los intercambios energéticos entre éstas y el campo electromagnético (EMF por sus siglas en inglés) se debía de dar en cantidades discretas de energía  $h\nu$ , con  $\nu$  la frecuencia del campo y  $h$  la constante de Planck. El segundo paso fue el dado por Einstein para explicar el efecto fotoeléctrico, donde ya no solo los cambios de energía son discretos, sino que la propia radiación está discretizada en cuantos de energía  $h\nu$  llamados posteriormente fotones.

Tras la formulación de la mecánica cuántica, fue posible hacer una teoría cuántica del EMF (por Dirac en 1927) aplicando las reglas generales de cuantización a la teoría clásica de Maxwell. Sin embargo, esta teoría entraba en dificultades si intentaba explicar la interacción de la radiación con la materia.

La electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés), unifica la teoría cuántica del campo electromagnético con la teoría relativista de los electrones (también por Dirac en 1928). Las bases de esta teoría ya fueron sentadas en 1929 por Heisenberg y Pauli pero la herramienta apropiada (la teoría de renormalización) tuvo que esperar hasta 1949 para ser desarrollada por Feynman y Schwinger. Fijémonos que entonces, el artículo de Casimir es anterior.

Durante el tiempo que se tardó en completar la QED, no se sabían tratar diversos infinitos que aparecían en los cálculos, y aunque Casimir no aportó la solución si hizo notar que las diferencias entre éstos podían tener significado físico. Nos preguntamos pues, ¿cómo llegamos a la expresión que Casimir utilizó en su artículo?

## 2.1. El campo electromagnético como una colección de osciladores armónicos

Para poder aplicar el procedimiento de cuantización usual al EMF, intentemos formular las ecuaciones de manera que exhiban su cercana relación con algún sistema mecánico. En aras de la simplicidad, nos restringiremos al EMF libre (sin fuentes). En él, las ecuaciones para  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)/\varepsilon \\ \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/\mu \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Rayleigh y Jeans propusieron que el campo electromagnético podía entenderse como una colección de osciladores armónicos. La dinámica de un oscilador armónico unidimensional viene dada por el Hamiltoniano:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

Un conjunto completo de osciladores armónicos unidimensionales se obtendría en términos de los modos normales, en los cuales el Hamiltoniano queda desacoplado y se descompone en sumas para cada modo:

$$H = \sum_k \left( \frac{p_k^2}{2m} + \frac{m\omega_k^2 q_k^2}{2} \right)$$

Manipulando las ecuaciones (1) resultan ecuaciones de onda para los campos  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$ ,

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0$$

y otra análoga para el campo magnético, las cuales podemos solucionar por separación de variables:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = a(t)\mathbf{u}(\mathbf{r}); \quad \text{donde } a(t) \text{ y } \mathbf{u}(\mathbf{r}) \text{ satisfacen } \begin{cases} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \omega^2 a(t) = 0 & \text{(ecuación armónica)} \\ \left[ \nabla^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 & \text{(ecuación de Helmholtz)} \end{cases}$$

Asumamos que existe un conjunto completo de vectores ortonormales  $\{\mathbf{u}_k(\mathbf{r})\}$  que satisfacen la ecuación de Helmholtz para las frecuencias  $\omega_k$ , la condición de divergencia nula (para satisfacer que  $\mathbf{D}$  la tenga) y además las apropiadas condiciones de contorno<sup>2</sup>. Dado tal conjunto, podemos expandir los campos como:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= -\sum_k p_k(t)\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \sum_k q_k(t)\mathbf{v}_k(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{2}$$

donde el signo menos en la expansión para el campo de desplazamiento es para hacer más fácil la correspondencia con el sistema mecánico y hemos asumido que existe otro conjunto  $\{\mathbf{v}_k(\mathbf{r})\}$  de vectores con las mismas propiedades que el anterior conjunto.

<sup>2</sup>Por ejemplo, las que satisfacen ondas estacionarias en una cavidad metálica.

Resulta que, con estas expresiones, las ecuaciones de Maxwell se satisfarán si los coeficientes de la expansión satisfacen las ecuaciones de movimiento de un oscilador armónico:

$$\begin{aligned}\frac{dq_k(t)}{dt} &= \frac{p_k(t)}{\varepsilon} \\ \frac{dp_k(t)}{dt} &= -\varepsilon\omega_k^2 q_k(t)\end{aligned}\tag{3}$$

pues sustituyendo la ecuación (2) en (5) se llega a que

$$\begin{aligned}\sum_k \frac{dp_k}{dt} \mathbf{u}_k &= -\sum_k \frac{q_k}{\mu} \nabla \times \mathbf{v}_k \\ \sum_k \frac{dq_k}{dt} \mathbf{v}_k &= -\sum_k \frac{p_k}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{u}_k\end{aligned}\tag{4}$$

Podemos identificar

$$\mathbf{v}_k(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{u}_k(\mathbf{r}), \quad y \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{p_k}{\varepsilon}$$

Usamos entonces que  $\nabla \times \mathbf{v}_k = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_k) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_k) - \nabla^2 \mathbf{u}_k \equiv -\nabla^2 \mathbf{u}_k$ , donde en el segundo paso se ha usado que se impuso que la divergencia de  $\mathbf{u}_k$  debía ser nula. Como cada  $\mathbf{u}_k$  satisface una ecuación de Helmholtz

$$-\nabla^2 \mathbf{u}_k = \frac{\omega_k^2}{c^2} \mathbf{u}_k \equiv \mu\varepsilon\omega_k^2 \mathbf{u}_k$$

de donde por identificación directa en las ecuaciones llegamos a (3).

Fijémonos que la constante dieléctrica juega el mismo papel aquí que la masa en el sistema mecánico. La analogía se completa ahora: si introducimos todo lo anterior en el hamiltoniano para el campo magnético

$$H = \int d^3r \left( \frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} \right)$$

se reduce a<sup>3</sup>

$$H = \sum_k \left( \frac{p_k^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon\omega_k^2 q_k^2}{2} \right)\tag{5}$$

ecuación análoga a (2.1).

## 2.2. Cuantización canónica

La cuantización canónica consiste en sustituir ahora los números  $q_k, p_k$  por operadores  $\hat{q}_k, \hat{p}_k$  que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas:

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{kl}\tag{6}$$

Ahora los campos eléctrico y magnético pasan a ser operadores funciones de los operadores posición y momento, y el hamiltoniano también pasa a ser un operador. La única diferencia entre la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos en el tratamiento del campo electromagnético es que en la segunda el número de variables canónicas es infinito. Esto puede dar problemas si tratamos de dar a esta forma de cuantizar el campo electromagnético fundamento matemático, pero en aplicaciones físicas simplemente podemos pensar que el número de osciladores del campo es muy grande aun sin ser infinito.

<sup>3</sup>Gracias a la exigencia de que los  $\{\mathbf{u}_k\}, \{\mathbf{v}_k\}$  sean ortonormales pues

$$\int d^3r \frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon} = \int d^3r \sum_{k,l} \frac{p_k(t)p_l(t)}{2\varepsilon} \mathbf{u}_k(\mathbf{r})\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = \sum_{k,l} \frac{p_k(t)p_l(t)}{2\varepsilon} \delta_{k,l} = \sum_k \frac{p_k^2(t)}{2\varepsilon}$$

donde en el segundo paso se ha usado que  $\int d^3r \mathbf{u}_k(\mathbf{r})\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = \delta_{kl}$ .

### 2.3. Operadores creación y destrucción

Las variables canónicas  $q_k, p_k$  nos fueron útiles pues nos brindaron la analogía con el sistema mecánico. Pero existe un aspecto corpuscular de la teoría del EMF que es expresable en términos de fotones. La mejor manera tal vez de introducirlo es mediante los operadores creación y destrucción. Éstos se definen a partir de los operadores posición y momento como:

$$\begin{aligned}\hat{a}_k &= \sqrt{\frac{\epsilon\omega}{2\hbar}} \left( \hat{q}_k + i\frac{\hat{p}_k}{\epsilon\omega} \right) \\ \hat{a}_k^\dagger &= \sqrt{\frac{\epsilon\omega}{2\hbar}} \left( \hat{q}_k - i\frac{\hat{p}_k}{\epsilon\omega} \right)\end{aligned}\tag{7}$$

los cuales se demuestra fácilmente que satisfacen  $[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{kl}$ . Introduciéndolos en la expresión para el Hamiltoniano (5) (una vez cuantizado, claro), éste se simplifica a:

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k\tag{8}$$

donde hemos separado claramente en dos términos pues el segundo correspondera a la energía del estado de vacío <sup>4</sup>.

Al estudiar el oscilador armónico, se resuelve el problema mediante también la introducción de éstos operadores, los cuales mediante su actuación sobre el estado del sistema lo suben o bajan a los estados inmediatamente superior o inferior (el espectro del operador hamiltoniano se encuentra equiespaciado). Para encontrar la energía del un estado, como son autoestados del hamiltoniano, no tenemos más que aplicar el operador  $\hat{H}$  sobre el estado. Sea  $|0\rangle$  el estado de vacío. Tal estado cumple que  $\hat{a}_k|0\rangle = 0$ <sup>5</sup>. Por tanto, la energía del estado de vacío o energía del punto cero se obtendrá mediante

$$\hat{H}|0\rangle = \sum_k \frac{1}{2} \hbar\omega_k |0\rangle = E_0|0\rangle$$

Es decir,  $E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k$ .

### 3. Cálculo de la interacción

En esta sección, partiremos de la expresión del hamiltoniano (8) para computar únicamente la energía del punto cero. Por tanto, seguiremos aquí los pasos que dio Casimir en su artículo. Casimir sabía que la energía del punto cero, es decir, la suma  $\frac{1}{2} \sum \hbar\omega_{\vec{k}}$  divergía, pero se le ocurrió que la diferencia de tal divergencia entre dos situaciones podría no diverger, y dar un resultado finito. Por tanto, en su artículo plantea la siguiente situación (ver figura 1): supongamos una cavidad cúbica de volumen  $L^3$  encerrado por placas planas perfectamente conductoras (lo que equivaldría a perfectamente reflectantes) y supongamos una placa plana paralela al plano  $x - y$  de lado  $L$  dentro de tal cubo, a una distancia  $a$  de la base (que recordemos, también es una placa perfectamente conductora de lado  $L$ ). En ambos casos (denotados por  $I$  el caso en el que se sitúa la susodicha placa y por  $II$  el caso en el que sólo tenemos el cubo de volumen  $L^3$ ), la suma sobre todas las frecuencias resonantes de las cavidades son divergentes “*and devoid of physical meaning but the difference between these sums* (esto es,  $\frac{1}{2} (\sum \hbar\omega_{\vec{k}})_I - \frac{1}{2} (\sum \hbar\omega_{\vec{k}})_{II}$ ) *will be shown to have a well defined value and this value will be interpreted as the interaction between the plate and the xy face*”, en palabras de Casimir.

Como sabemos, las posibles vibraciones en la cavidad

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq a\}$$

<sup>4</sup>Otra forma de realizar toda esta cuantización consiste en expandir en serie de Fourier el potencial vector e imponer a los coeficientes de la expansión la cuantización que cumplen los operadores de creación y destrucción, ocurriendo al final que tales coeficientes resultan ser éstos operadores.

<sup>5</sup>No nos detendremos en esto. Las demostraciones concernientes a ello se pueden encontrar en cualquier libro de mecánica cuántica usual, véase por ejemplo “Quantum Mechanics: A Modern Development” del autor Leslie E. Ballentine, Cap. 6.

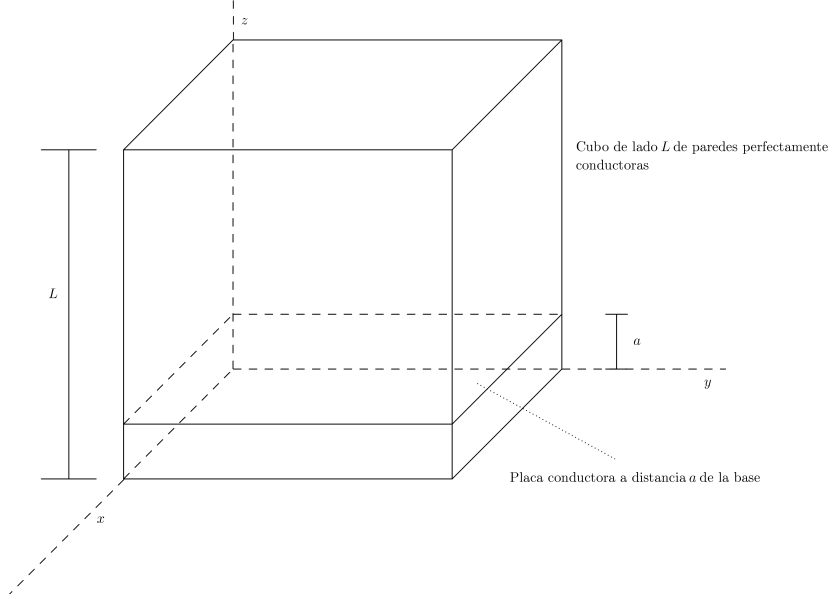


Figura 1: Esquema de la situación planteada.

han de tener números de onda (debido a las condiciones de contorno impuestas):

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\pi}{L} n_x, \\ k_y &= \frac{\pi}{L} n_y, \\ k_z &= \frac{\pi}{a} n_z \end{aligned}$$

con  $(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{N}^3$ . Dado que tratamos de calcular la energía del punto cero del campo electromagnético,  $\omega_{\vec{k}} = ck = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ . Según las direcciones  $x, y$  tenemos que podemos tratar  $k_x, k_y$  como variables continuas (límite  $L \rightarrow \infty$ ), no así con  $k_z$  pues las frecuencias resonantes según en esa dirección son las de las longitudes de onda que “cabren” en una distancia finita  $a$ , luego son frecuencias discretas. Para las variables continuas, podemos hacer:

$$\sum_{k_x, k_y} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sum_{k_x, k_y} \Delta^2 k \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int d^2 k \quad (9)$$

y por tanto escribimos:

$$\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} = \hbar c \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}_{\text{término para } n=0} + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{n^2 \frac{\pi^2}{a^2} + k_x^2 + k_y^2} \right] dk_x dk_y \quad (10)$$

El 1/2 que multiplica al término correspondiente a  $n = 0$  se debe a que para cada  $k_x, k_y, k_z$  corresponden dos ondas estacionarias a menos que uno de los  $n_i$  sea cero, donde en tal caso solo hay una y por ello conserva el 1/2 sólo ese término.

Introduciendo coordenadas polares en el plano  $k_x - k_y$ , con  $\chi^2 = k_x^2 + k_y^2$  se reescribe:

$$\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} = \hbar c \frac{L^2}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \sum_{(0)1}^\infty \int_0^\infty \sqrt{n^2 \frac{\pi^2}{a^2} + \chi^2} \chi d\chi$$

donde el término  $\pi/2$  viene por integrar en ángulos el cuadrante positivo y la notación para el sumatorio (0)1 es la introducida por Casimir en su artículo, y significa que el término de la suma  $n = 0$  ha de ser

multiplicado por  $1/2$ . Fijémonos que si no hubiéramos mantenido  $a$  por la discretitud, es decir, si fuese una distancia macroscópica, tal suma se replazaría por una integral con un factor  $\frac{a}{\pi}$  tal y como se deriva de (9), y obtendríamos:

$$\begin{aligned} \delta E &\equiv \frac{1}{2} \left( \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \right)_I - \frac{1}{2} \left( \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \right)_{II} = \\ &= \hbar c \frac{L^2 \pi}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{(0)1}^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{\left( n^2 \frac{\pi^2}{a^2} + \chi^2 \right)} \chi d\chi - \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{(k_z^2 + \chi^2)} \chi d\chi dk_z \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Para poder obtener de la diferencia de esas dos sumas divergentes un resultado finito, Casimir introduce una función que module los integrandos y que denota como  $f(k/k_m)$  la cual ha de valer la unidad para  $k \ll k_m$  (en otras palabras,  $f(0) = 1$ ) pero que tiende a cero suficientemente rápido para  $\frac{k}{k_m} \rightarrow \infty$ , donde  $k_m$  puede estar definida tal que  $f(1) = 1/2$ . La introducción de tal función modulante obedece a la intuición y Casimir le asigna un significado físico obvio:

*“for very short waves (X-rays e.g.) our plate is hardly an obstacle at all and therefore the zero point energy of these waves will not be influenced by the position of this plate.”*

Introduciendo ahora la variable  $u = a^2 \chi^2 / \pi^2$ , se tiene que:

- Diferenciando encontramos que  $\chi d\chi = \frac{\pi^2}{2a^2} du$ .
- Para  $k$  encontramos:  $k = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + u^2}$
- En el segundo sumando de (11) usamos  $dk_z = adn/\pi$

Así queda que (11) se simplifica a:

$$\delta E = L^2 \hbar c \frac{\pi^2}{4a^3} \left\{ \sum_{(0)1}^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{(n^2 + u)} f \left( \frac{\pi \sqrt{n^2 + u}}{ak_m} \right) du - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{(n^2 + u)} f \left( \frac{\pi \sqrt{n^2 + u}}{ak_m} \right) du dn \right\} \quad (12)$$

Ahora aplicamos (12) la formula de EULER- MACLAURIN <sup>6</sup>:

$$\sum_{(0)1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = -\frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{24 \times 30} F'''(0) + \dots$$

Introduciendo el cambio  $w = u + n^2$ , nuestra  $F(n)$  será:

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{w} f \left( \frac{w\pi}{ak_m} \right) dw$$

de donde (por comodidad juntaremos los símbolos integrales en un paréntesis)

$$\int_{n^2}^{\infty} \sqrt{w} f \left( \frac{w\pi}{ak_m} \right) dw = \left( \int_{n^2}^0 + \int_0^{\infty} \right) \sqrt{w} f \left( \frac{w\pi}{ak_m} \right) dw = \left( -\int_0^{n^2} + \int_0^{\infty} \right) \sqrt{w} f \left( \frac{w\pi}{ak_m} \right) dw$$

Para derivarla, aplicamos el teorema Fundamental del Cálculo (en conjuncion con la regla de la cadena):

$$G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(x) dx \rightarrow \frac{dG(x)}{dx} = g(b(x)) \frac{db(x)}{dx} - g(a(x)) \frac{da(x)}{dx}$$

<sup>6</sup>En la referencia [4] se explican las matemáticas bajo estos cálculos: la función  $f(k/k_m)$ ; que aquí se ha tomado tal como hace Casimir en su artículo, ahí se toma para ejemplificar  $e^{-\lambda(n+x)}$  que cumple con lo exigido. En tal artículo se menciona también que “[...] recently some physicist have recalculated the Casimir effect under the additional (hypothetical) assumption that photons have a nonzero rest mass”, y que “At the point where one tries to apply the Euler-Maclaurin Summation Formula it does not work”. Lo que se vio que era necesario era aplicar la fórmula de sumación de Abel-Plana, la cual se introduce también en el artículo y que también es aplicable al caso que se planteó Casimir, brindando los mismos resultados. Otros desarrollos llegan a un punto en el cual se obtiene una suma computable asumiendo la extensión analítica de la función Zeta de Riemann.

por lo que al derivar obtenemos:

$$F'(n) = -2n^2 f\left(\frac{n^2\pi}{ak_m}\right), \quad \rightarrow F'(0) = 0$$

(la derivada cuyos límites de integración eran 0 e  $\infty$  es una constante luego es nula) y

$$\begin{aligned} F''(n) &= -4nf\left(\frac{n^2\pi}{ak_m}\right) - \frac{4n^3\pi}{ak_m} f'\left(\frac{n^2\pi}{ak_m}\right) \\ F'''(n) &= -4f\left(\frac{n^2\pi}{ak_m}\right) - \frac{20n^2\pi}{ak_m} f'\left(\frac{n^2\pi}{ak_m}\right) - \frac{8n^4\pi^2}{a^2k_m^2} f''\left(\frac{n^2\pi}{ak_m}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

y como  $f(0) = 1$ ,  $F'''(0) = -4$ .

Las derivadas de órdenes superiores serán nulas debido a la aparición explícita de  $n$ . Introduciendo esto en (12) obtenemos:

$$\frac{\delta E}{L^2} = -\hbar c \frac{\pi^2}{24 \times 30} \frac{1}{a^3} \quad (14)$$

fórmula válida en tanto que  $ak_n \gg 1$  (pues serán despreciables los órdenes superiores). Dado que la energía de interacción depende de la distancia, su menos derivada será la fuerza que sufran (o la presión al estar dividida por el área de las placas), dando una presión de:

$$\frac{F}{L^2} = \hbar c \frac{\pi^2}{240} \frac{1}{a^4} \quad (15)$$

Así, Casimir afirma:

*“There exist an attractive force between two metal plates which is independent of the material of the plates as long as the distance is so large that for wave lengths comparable with that distance the penetration depth is small compared with the distance. This force may be interpreted as a zero point pressure of electromagnetic waves.”*

Para hacernos una idea de las magnitudes, 2 placas de 1 cm<sup>2</sup> de superficie a una micra de distancia se atraerían con una fuerza de unos 10<sup>-7</sup>N. Aunque la fuerza se torna insignificante en cuanto la distancia crece un poco, a distancias de pocos nanómetros la fuerza de Casimir se convierte en la más importante que actúa entre dos cuerpos neutros. Tanto es así, que en dispositivos micro y nanoelectromecánicos llega a ser un gran problema, pegando a las plaquitas que los componen y ocasionando el mal funcionamiento de las nanomáquinas.

### 3.1. Casimir y Van der Waals

Hasta aquí hemos dado por sentado que la interacción surgía de las diferencias de energía del punto cero del vacío. Sin embargo, Casimir era consciente de la posibilidad de otras interpretaciones como la que dio con Polder en términos de fuerzas de Van der Waals entre las moléculas dieléctricas del material de las placas.

Segun Casimir, en el interior del metal que forman las placas existen fuerzas de cohesión que cuando se presionan las placas comienzan a actuar. Si se intenta separar una placa en dos por ejemplo, Casimir expone que primero habría que vencer los enlaces químicos entre las moléculas, luego las fuerzas residuales de cohesión de Van der Waals cuando aun estuvieran muy próximos y, de seguir separando más, la fuerza de Casimir.

### 3.2. No siempre atractiva

Visto como en el párrafo anterior, diríamos que la interacción por tal efecto ocasionaría siempre una fuerza atractiva. Pero resulta que en 1968 Timothy Boyer publicó un artículo (ver la referencia [5]) calculando que, dos casquetes esféricos metálicos tocándose para formar una cápsula esférica experimentarían una presión hacía fuera que los separaría. Y concluye Boyer que:



*“Thus althoug relevant for the understanding of the quantum mechanical zero-point energy, the result invalidates Casimir’s intriguing model for a charged particle as a charged conducting shell with Poincaré stresses [aquí Boyer se refiere al artículo H.B.G. Casimir, Physica 19, 846 (1956) como motivación central para realizar este cálculo.] provided by the zero-point energy and a unique ratio for  $e^2/\hbar c$  independent of the radius.”*

## 4. Verificaciones experimentales

No podríamos acabar este trabajo sin hablar de las verificaciones experimentales a las que se ha sometido este efecto. Y es que el propio Casimir acaba su artículo con lo siguiente:

*“Although the effect is small, an experimental confirmation seems not unfeasable and might be of a certain interest.”*

### 4.1. Demasiado ideal

Pero claro, el experimento mental que se propuso Casimir es demasiado ideal: las placas no tienen extensión infinita, ni son perfectamente conductoras (su conductividad es finita). Además, intervienen efectos por haber una temperatura mayor que  $0\text{ K}$  (como la que queda implícita en el cálculo de Casimir), de rugosidad, gravitatorios, etc. Otro problema, por ejemplo, es cómo preparar las dos placas exactamente paralelas. Las primeras confirmaciones experimentales del susodicho efecto, llevadas a cabo en los laboratorios de Philips en Eindhoven por Marcus Sparnaay y otros colaboradores (ver la referencia [6]) (diez años tras la aparición del artículo) no se consideran hoy en día las verdaderas comprobaciones, ya que subestimaron los diversos errores que introducían todas estas variables no tenidas en cuenta.

Hubo de transcurrir hasta 1997 hasta que, Steven Lamoreaux (ver la referencia [7]) de la universidad de Washington en Seattle, obtuviera un resultado concluyente. Midió la fuerza debida al efecto Casimir entre una lente esférica de cuatro centímetros de diámetro y una placa de cuarzo óptico de dos centímetros y medio en diagonal, ambas con un recubrimiento de cobre y oro, conectadas a un péndulo de torsión en el vacío. Otro experimento en el que se confirmó tal efecto fue el de Thomas Ederth, del Real Instituto de Tecnología de Estocolmo, también con un microscopio de fuerzas atómicas, en el que situaba dos cilindros recubiertos de oro en posiciones perpendiculares entre sí y separados solo 20 nm. En ambos casos, la precisión fue de entorno a un 3-5%. Destaquemos que en ambos se usan superficies curvas, en lugar de dos superficies planas, pues es más sencillo experimentalmente conocer la distancia a la que se sitúan.

### 4.2. Añadiendo correcciones

También debemos destacar los experimentos de Umar Mohideen (ver la referencia [8]) y colaboradores en la universidad de California en Riverside. Introdujeron correcciones para la rugosidad, la temperatura y la conductividad finita (en su artículo es crítico con las medidas anteriores, que aunque reconoce que confirman el efecto, su error es mayor el que mencionan debido a no tener en cuenta tales correcciones -pensemos que la rugosidad por ejemplo, ¡puede llegar a ser del tamaño de la separación entre placas!-) y sus mediciones están en un acuerdo de hasta un 1% de error únicamente (respecto a las fórmulas corregidas). Para que veamos qué tipos de correcciones se introducen, escribamos aquí algunas fórmulas extraídas de su artículo.

En él, se comenta que para el caso de fuerza entre plano y esfera, se modifica la fórmula (15) en:

$$F_c^0(d) = \frac{-\pi^3}{360} R \frac{\hbar c}{d^3}$$

donde  $R$  es el radio de la esfera,  $d$  la distancia que separa esfera y plano, y debe ser tal que  $R \gg d$ .

Por ejemplo, para tener en cuenta la conductividad finita se introduce la corrección (basada en el modelo de electrones libres de reflectividad de los metales) siguiente:

$$F_c^p(d) = F_c^0(d) \left[ 1 - 4 \frac{c}{d\omega_p} + \frac{72}{5} \left( \frac{c}{d\omega_p} \right)^2 \right]$$

para una frecuencia de plasmon  $\omega_p$  dada.

Por otro lado, para tener en cuenta la rugosidad se introduce:

$$F_c^R(d) = F_c^p(d) \left[ 1 + 6 \left( \frac{A_r}{d} \right)^2 \right]$$

donde  $A_r$  es la amplitud de rugosidad media e igual rugosidad para ambas superficies es asumida.

Otra corrección que se añade es la debida a la temperatura finita, con lo que la fuerza que miden debería seguir la expresión final:

$$F_c(d) = F_c^R(d) \left( 1 + \frac{720}{\pi^2} f(\xi) \right) \quad (16)$$

donde  $f(\xi) = \frac{\xi^3}{2\pi} \zeta(3) - \frac{\xi^4 \pi^2}{45}$ , con  $\xi = 2\pi k_B T d / hc$  y  $\zeta$  es la función zeta de Riemann.

Todo lo anterior es una forma de parametrizar las distintas correcciones que se cree que deben de meterse: no tiene por qué ser la mejor, y de hecho el debate entorno a como parametrizar la corrección por la temperatura continua.

El error del único experimento llevado a cabo con dos placas, por parte del grupo de G. Bressi (ver la referencia [9]) en el año 2002 en la universidad de Padua, no pudo bajarse del 15 %.

## Referencias

- [1] ELIZALDE, E., *Efecto Casimir*. Descargado de [http://www.ice.csic.es/personal/elizalde/eli/ic03-09\\_Elizalde.pdf](http://www.ice.csic.es/personal/elizalde/eli/ic03-09_Elizalde.pdf)
- [2] H.B.G. CASIMIR, *On the attraction of two perfectly conducting plates*, *Proc. Kon. Akad. Ned. Wet.* 51 (1948), 793-795
- [3] BIALYNICKI-BIRULA, I.; BIALYNICKA-BIRULA, Z., *Quantum Electrodynamics. Quantum theory of the electromagnetic field*. Descargado de <http://www.cft.edu.pl/~birula/publ/QED.pdf>
- [4] DOWLING, J.P., *The Mathematics of the Casimir Effect* Descargado de <http://www.phys.lsu.edu/~jdowling/PHYS4112/Dowling89d.pdf>
- [5] BOYER, T.H., *Quantum Electromagnetic Zero-Point Energy of a Conducting Spherical Shell and the Casimir Model for a Charged Particle* (1968) *Physical Review Letters*. Volume 174, Number 5.
- [6] SPARNAAY, M., *Measurements of attractive forces between flat plates*. (1958) *Physica*. 24 (6-10): 751
- [7] LAMOREAUX, S.K., *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  range*. (1997) *Physical Review Letters*. 78(1): 5-8
- [8] MOHIDEEN, U.; ROY, ANUSHREE, *A precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9  $\mu\text{m}$* . (1998) *Physical Review Letters*. 81 (21): 4549.
- [9] BRESSI, G.; CARUGNO, G.; ONOFRIO, R.; RUOSO, G. , *Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces* (2002) *Physical Review Letters*. 88 (4): 041804