

Relatividad Especial

Manel Bosch Aguilera

Noviembre 2010

1. Postulados

- i. Todas las leyes físicas, mecánicas o electromagnéticas, son las mismas en todos los sistemas de referencia iniciales.
- ii. La velocidad de la luz es una constante c en todos los sistemas de referencia iniciales.

2. Transformación de Lorentz

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$x' = \gamma(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z;$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

3. Cinemática relativista

a) Contracción de longitudes:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L_0$$

b) Dilatación de tiempos:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > T_0$$

c) Relatividad de la simultaneidad:

$$t'_a - t'_b = \gamma \frac{v}{c^2} (x_a - x_b)$$

d) Ley relativista de la adición de velocidades:

$$v_x = \frac{v_{x'} + v}{1 + \frac{v_{x'} v}{c^2}}$$

e) Efecto Doppler Relativista:

$$\nu_O = \nu_E \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}; \quad \nu_O = \nu_E \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

f) Invariancia del intervalo relativista

$$\Delta s = \sqrt{c^2(t_b - t_a)^2 - [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2]}$$

$$\Delta s = \Delta s'$$

4. Dinámica Relativista

- “Todas las leyes físicas tienen que ser invariantes por una transformación de Lorentz.”
- Espacio de Minkowsky: $(x, y, z, ict) = (x, y, z, \tau)$

$$-ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (d\tau)^2$$

- “Una rotación en el espacio de Minkowsky es una transformación de Lorentz.”

Definiciones:

- Cuadrivector posición:

$$\underline{r} = (r_x, r_y, r_z, r_\tau) = (x, y, z, \tau)$$

- Tiempo propio:

$$dt_0 = \frac{1}{c} ds = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- Cuadrivector velocidad:

$$\underline{u} = \frac{d \underline{r}}{dt_0}$$

$$\text{i. } |\underline{u}|^2 = -c^2$$

$$\text{ii. } \underline{u} \cdot \frac{d \underline{u}}{dt_0} = 0$$

Ley relativista de la dinámica: determinadas por su masa invariante o masa en reposo m (es un invariante relativista).

a) Cuadrimomento

$$\underline{p} = m \underline{u};$$

$$p_\alpha = \gamma(mv_\alpha) \quad \alpha \in \{x, y, z\}; \quad p_\tau = \gamma imc$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

b) Acción externa

$$\underline{K} = \frac{d \underline{p}}{dt_0} = (K_x, K_y, K_z, K_\tau)$$

- (K_x, K_y, K_z) :

$$K_\alpha = \frac{dp_\alpha}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\blacksquare K_\tau \rightarrow F_\tau = K_\tau \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$F_\tau = \frac{i}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{dE}{dt}$$

c) Energía cinética relativista

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E_0 + E_c \quad T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$$

d) Algunas relaciones y expresiones útiles

$$p_\tau = \frac{imc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = i \frac{E}{c}$$

$$p_{x'} = \frac{p_x + i \frac{E}{c} p_\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad p_{\tau'} = \frac{E - i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \vec{v} = c^2 \frac{\vec{p}}{E}$$