

Deducción de las Reglas de Feynman

Ignacio M. Hierro R.

enero 2011

Introducción

Nuestro objetivo es deducir las reglas de Feynman a partir de la teoría de la matriz S. Seguiremos principalmente los libros de Weinberg [1] y Peskin [2].

Matriz S

Supongamos que el hamiltoniano se puede expresar como

$$H = H_0 + H_{int}$$

donde H_0 representa la parte “libre” y H_{int} la parte de interacción. Trabajaremos en la imagen de interacción, o de Dyson, en la que la evolución de estados y operadores viene dada por

$$A(t) = U_0^\dagger(t) A U_0(t)$$

$$|\psi(t)\rangle = U_{int}(t) |\psi(0)\rangle$$

$$U_{int}(t) = U_0^\dagger(t) U(t)$$

$U_0(t)$ es el operador evolución temporal asociado al hamiltoniano libre y $U(t)$ el asociado al hamiltoniano completo. Recordemos que, en estas

condiciones, podíamos hacer un desarrollo perturbativo de U_{int} , obteniendo la siguiente expresión

$$U_{int}(t, t_0) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t T[H_{int}(\tau_1) \dots H_{int}(\tau_N)] d\tau_1 \dots d\tau_N$$

Se ha utilizado el producto tiempo ordenado, definido como

$$T[\phi(x)] = \phi(x)$$

$$T[\phi(x)\phi(y)] = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x)$$

y así continuamente, ordenando temporalmente los operadores de izquierda a derecha. De modo formal, se suele expresar de forma condensada el operador evolución,

$$U_{int}(t, t_0) = T[\exp(-i \int_{t_0}^t H_{int}(\tau) d\tau)]$$

Esta expresión es claramente no covariante, puesto que depende de las coordenadas t, t_0 .

Por motivos tanto experimentales como teóricos, se define la matriz S como el operador que lleva estados de $t = -\infty$ (llamados “in”) a $t = +\infty$ (estado “out”).

$$S = T[\exp(-i \int_{-\infty}^{+\infty} H_{int}(\tau) d\tau)]$$

Se entiende, pues, que este sea el objeto más importante de la teoría de campos, puesto que relaciona los estados iniciales que se preparan en laboratorio con los finales que se miden en este. De modo genérico, tendremos al inicio un estado con una mezcla de partículas $\alpha, |\alpha\rangle$, y al final un estado con otro conjunto de partículas $\beta, |\beta\rangle$. Con las etiquetas se sobreentiende que se tendría que explicar el momento, espín y naturaleza de cada partícula integrante. De modo explícito,

$$|\alpha\rangle \equiv |\vec{p}_1, \sigma_1, n_1; \vec{p}, \sigma_2, n_2; \dots\rangle$$

$$|\beta\rangle \equiv |\vec{p}'_1, \sigma'_1, n'_1; \vec{p}'_2, \sigma'_2, n'_2; \dots\rangle$$

donde n_i indica la naturaleza de la partícula i -ésima. Por tanto, el objetivo será calcular los elementos de matriz,

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta | S | \alpha \rangle$$

Nuestro punto de partida para la deducción de las reglas será, precisamente, esta expresión explícita:

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \langle 0 | \dots a(\vec{p}'_2, \sigma'_2, n'_2) a(\vec{p}'_1, \sigma'_1, n'_1) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots d\tau_N T[H_{int}(\tau_1) \dots H_{int}(\tau_N)] a^\dagger(\vec{p}_1, \sigma_1, n_1) a^\dagger(\vec{p}, \sigma_2, n_2) \dots | 0 \rangle$$

Empleamos los operadores creación y destrucción para generar los estados con partículas a partir del vacío, que de manera más rigurosa sería $|0\dots 0\rangle$.

El hamiltoniano de interacción, al igual que la parte libre, vendrá dado como la integral en el espacio tridimensional de una determinada densidad hamiltoniana,

$$H_{int} = \int \mathcal{H}_{int} d^3x$$

En casos sencillos, como QED, obtenemos la densidad hamiltoniana de interacción simplemente poniendo un signo menos en el término correspondiente del lagrangiano.

Además, supondremos que \mathcal{H}_{int} viene dado por un polinomio en los campos que intervienen y sus adjuntos,

$$\mathcal{H}_{int} = \sum g_i \mathcal{H}_i$$

donde g_i es la constante de acoplamiento de cada término. En Electrodinámica Cuántica tenemos el término proporcional a $\bar{\psi} \not{A} \psi$, que está dado por el producto de tres campos. Con esto, y teniendo en cuenta que podemos hacer las integrales a todo el espacio de Minkowski fuera del braket, obtenemos

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_N \langle 0 | \dots a(\vec{p}'_2, \sigma'_2, n'_2) a(\vec{p}'_1, \sigma'_1, n'_1) \times \\ \times T[\mathcal{H}_{int}(x_1) \dots \mathcal{H}_{int}(x_N)] a^\dagger(\vec{p}_1, \sigma_1, n_1) a^\dagger(\vec{p}, \sigma_2, n_2) \dots | 0 \rangle$$

Teorema de Wick

Veremos que el paso esencial en la deducción de las reglas consiste en tratar convenientemente con los productos tiempo ordenado. Para ello, debemos recordar la relación que existe entre estos y el producto normal.

Se define el producto normal entre dos operadores como aquel en el que los operadores destrucción están a la derecha de los operadores creación. Aunque en la literatura se suele emplear la notación $:\phi\psi:$, nosotros seguiremos a [2] y lo denotaremos por $N[\phi\psi]$. Por ejemplo, $N[a_q a_p^\dagger a_k] = a_p^\dagger a_q a_k$.

A la vista de la definición, está claro que el valor esperado en el vacío del producto normal de cualquier número de operadores se anula, debido a que los operadores destrucción/creación están situados a la derecha/izquierda del todo,

$$\langle 0 | N[\phi_1 \dots \phi_n] | 0 \rangle = 0$$

Está claro que, a través de las reglas de (anti)conmutación, podemos pasar fácilmente del producto habitual al producto normal. Por ejemplo,

$$a_q a_p^\dagger = \pm N[a_q a_p^\dagger] + [a_q a_p^\dagger]_{\mp} = \pm a_p^\dagger a_q + [a_q a_p^\dagger]_{\mp}$$

donde el signo superior corresponde a bosones y el inferior a fermiones.

Definimos la contracción de dos operadores como la diferencia entre su producto tiempo ordenado y su producto normal, y se denota por $\overline{\phi\psi}$.

Todo campo cuántico tendrá una parte de creación y otra de destrucción (supondremos que es un bosón por simplicidad, pero lo mismo se puede hacer con un fermión),

$$\phi = \phi^+ + \phi^-$$

Calculemos el producto tiempo ordenado del mismo campo cuántico en distintos puntos

$$\begin{aligned} T[\phi(x)\phi(y)] &\stackrel{x_0 > y_0}{=} \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) = \\ &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) + [\phi^+(x)\phi^-(y)] = \\ &= N[\phi(x)\phi(y)] + [\phi^+(x)\phi^-(y)] \end{aligned}$$

En el caso de que $y_0 < x_0$, obtendríamos lo mismo, pero el conmutador que aparecería sería $[\phi^+(y), \phi^-(x)]$. Por tanto,

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \theta(x_0 - y_0)[\phi^+(x)\phi^-(y)] + \theta(y_0 - x_0)[\phi^+(y), \phi^-(x)] = D_F(x - y)$$

Es decir: la contracción de dos campos (del mismo tipo) es precisamente el propagador de Feynman.

El teorema de Wick, que daremos sin demostración, dice que el producto tiempo ordenado de cualquier número de operadores es igual a su producto normal más todas las combinaciones de contracciones posibles, calculadas estas también en producto normal. Explícitamente,

$$T[\phi_1 \dots \phi_m] = N[\phi_1 \dots \phi_m + \text{todas las posibles contracciones}]$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} T[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] = & N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \\ & + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \\ & + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}] \end{aligned}$$

Cuando tengamos productos de términos contraídos por términos sin contraer, se sobreentiende lo siguiente:

$$\begin{aligned} N[\overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}] &= \overbrace{\phi_1 \phi_3} N[\phi_2 \phi_4] = \\ &= D_F(x_1 - x_3) N[\phi_2 \phi_4] \end{aligned}$$

Calculemos ahora el valor esperado en el vacío en este mismo ejemplo. Como $\langle 0 | N[\phi_1 \dots \phi_n] | 0 \rangle = 0$, solo sobreviven los términos totalmente contraídos:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] | 0 \rangle | 0 \rangle = & D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + \\ & + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

Nótese que el resultado final son propagadores, no valores medios. Esto es debido a que los conmutadores $[\phi(x), \phi(y)]$ son lo que se llama un “c-number”, es decir, un “número clásico” (notación utilizada en toda la bibliografía). Con esto lo que se quiere decir es que

$$[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

En conclusión, el resultado que buscábamos es

$$\langle 0 | T[\phi_1 \dots \phi_n] | 0 \rangle = \langle 0 | \text{ todos los posibles términos totalmente contraídos } | 0 \rangle$$

Reglas de Feynman

Espacio de posición

Hemos escrito los elementos de la matriz S en función de valores esperados en el vacío. Sin embargo, los operadores creación y destrucción se encuentran fuera del producto tiempo ordenado, por lo que no podemos aplicar directamente el resultado de la sección anterior. Dicho de otro modo: la parte del producto normal asociado al producto T ahora no se anula, puesto que no está evaluado entre dos vacíos, sino que existen productos con los operadores a y a^\dagger que darán contribuciones no nulas. Así pues, el proceso a seguir sería reordenar estos operadores, así como los asociados a las partes ϕ^+ y ϕ^- de los campos en los hamiltonianos, para conseguir productos normales, que ahora sí se anularían, así como las contribuciones de los (anti)conmutadores correspondientes.

Sin embargo, esto sería equivalente a haber supuesto desde un inicio que todos los operadores iban incluidos dentro del producto tiempo ordenado. Como a y a^\dagger no dependen de las coordenadas espaciotemporales, al menos de manera formal podemos escribir lo siguiente:

$$\langle 0 | \prod_i a_i T[\mathcal{H}_{int}(x_1) \dots \mathcal{H}_{int}(x_N)] \prod_j a_j^\dagger | 0 \rangle \equiv \langle 0 | T[\prod_i a_i \mathcal{H}_{int}(x_1) \dots \mathcal{H}_{int}(x_N) \prod_j a_j^\dagger] | 0 \rangle$$

Ahora sí podemos aplicar el teorema de Wick a todo el producto tiempo ordenado, con lo que obtenemos, en definitiva, que lo que debemos hacer es considerar todas las posibles contracciones. En la literatura consultada no se escribe nunca la expresión superior, sino que se justifica el hecho de tener que realizar al final todas las contracciones posibles con los operadores creación y destrucción como en el párrafo anterior.

Para calcular la contracción de los operadores a entre sí, o con los campos, debemos evaluar la diferencia entre los productos T y los N . Al no depender de la posición, podemos definir de manera simple (y formal, puesto que esto

no se ha observado en los libros) el producto tiempo ordenado entre estos operadores como el producto habitual,

$$T[aa^\dagger] \equiv aa^\dagger$$

Como ya sabemos que la diferencia entre esto y el producto normal es el (anti)conmutador,

$$\overline{aa^\dagger} = [a, a^\dagger]_{\mp}$$

Del mismo modo,

$$\overline{a\phi} = [a, \phi]_{\mp}$$

Es igual con el resto de combinaciones entre a/a^\dagger y los campos y sus adjuntos.

En definitiva, para evaluar $S_{\alpha\beta}$, a un valor de N concreto, tendremos que sumar todas las posibles combinaciones de elementos totalmente contraídos. Por ejemplo, si $\mathcal{H}_{int} = g\bar{\psi}\phi\psi$ (interacción Yukawa, donde ψ es un fermión y ϕ un campo bosónico), a orden $N = 1$ y calculando entre un estado inicial con un fermión y uno inicial con un fermión y un bosón,

$$\langle 0 | fb\bar{\psi}\phi\psi f^\dagger | 0 \rangle = \overbrace{fb\bar{\psi}\phi\psi f^\dagger} + \overbrace{fb\bar{\psi}\phi\psi f^\dagger}$$

Los operadores f y b son los de creación de fermiones y bosones, respectivamente. No existen términos con contracciones entre operadores de partículas de distinto tipo ($f\phi$, por ejemplo) debido a que, al conmutar, la contracción es nula. Recordemos, además, que como los conmutadores son “c-numbers”, desaparecen los valores esperados. Por tanto, no habría más que calcular las contracciones, multiplicarlas, sumar, integrar en todo el espacio y multiplicar por el factor $\frac{(-i)^2}{2!}$.

Como sabemos todas las posibles combinaciones, podemos calcular de antemano cuánto valen las contracciones, con lo que el cálculo se simplifica aún más. La filosofía de los diagramas de Feynman consiste en asociar a cada una de esas parejas un dibujo determinado; la multiplicación de todas las contracciones vendrá representado por la unión de las distintas partes del grafo. Cada diagrama representa una de estas posibles combinaciones. En el ejemplo anterior, cada sumando tendría asociado un diagrama. Por último, cuando ya tengamos asignado el convenio de los diagramas, podremos realizar la construcción de la matriz S en el sentido contrario al que acabamos

de hacer: dibujaremos un diagrama, multiplicaremos los factores correspondientes (que representan contracciones de operadores) e integraremos. Veremos que podemos darle un significado físico a cada pareja de campos, con lo que el diagrama nos servirá para representar situaciones físicas concretas.

Una vez comprendido cómo se realiza el paso al marco diagramático de Feynman, pasamos a dar las reglas del modo más general posible, siguiendo el libro de Weinberg [1]. Después utilizaremos ejemplos concretos no tan genéricos, para acabar dando las reglas de Feynman de la QED, objetivo último de este trabajo.

Utilizaremos la siguiente expresión para los campos cuánticos

$$\psi_l = \sum_{\sigma} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p [u_l(\vec{p}, \sigma, n) a(\vec{p}, \sigma, n) e^{-ipx} + v_l(\vec{p}, \sigma, n) a^{\dagger}(\vec{p}, \sigma, n^c) e^{ipx}]$$

Recordemos que el índice n hace referencia a la naturaleza de la partícula, representando n^c la antipartícula asociada. Las exponenciales $e^{\pm ipx}$ están calculadas en la capa de masas ($p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_n^2}$). Los coeficientes u_l y v_l dependen del espín de las partículas y de sus propiedades al sufrir transformaciones de Lorentz (en el campo escalar neutro sería simplemente $(2E)^{-1/2}$, mientras que para un campo de Dirac serían espinores de Dirac normalizados). El índice l , que hace referencia al tipo de partícula, incluye un índice que etiqueta las componentes de la representación del grupo de Lorentz. Por último, el sumatorio en σ debe entenderse como una suma en las componentes de espín (como la suma en $s = 1$ y $s = 2$ en el campo de Dirac). Recordemos, por último, que el hamiltoniano venía dado como un polinomio en los campos que intervienen.

Realizando el cálculo explícito, es fácil ver que las posibles contracciones dan lo siguiente [1]:

1. Emparejamiento de una partícula en el estado final con números cuánticos \vec{p}', σ', n' con un campo adjunto $\psi_l^{\dagger}(x)$ en \mathcal{H}_i :

$$a(\vec{p}', \sigma', n') \overline{\psi_l^{\dagger}} = [a(\vec{p}', \sigma', n'), \psi_l^{\dagger}]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip'x} u_l^*(\vec{p}', \sigma', n')$$

2. Emparejamiento de una antipartícula en el estado final con números cuánticos \vec{p}', σ', n'^c con un campo $\psi_l(x)$ en \mathcal{H}_i :

$$a(\vec{p}', \sigma', n'^c) \overline{\psi_l} = [a(\vec{p}', \sigma', n'^c), \psi_l]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip'x} v_l(\vec{p}', \sigma', n')$$

3. Emparejamiento de una partícula en el estado inicial con números cuánticos \vec{p}, σ, n con un campo $\psi_l(x)$ en \mathcal{H}_i :

$$\overline{\psi_l a^\dagger(\vec{p}, \sigma, n)} = [\psi_l, a^\dagger(\vec{p}, \sigma, n)]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{ip'x} u_l(\vec{p}, \sigma, n)$$

4. Emparejamiento de una antipartícula en el estado inicial con números cuánticos \vec{p}, σ, n^c con un campo adjunto $\psi_l^\dagger(x)$ en \mathcal{H}_i :

$$\overline{\psi_l a^\dagger(\vec{p}, \sigma, n)} = [\psi_l, a^\dagger(\vec{p}, \sigma, n)]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{ip'x} v_l^*(\vec{p}, \sigma, n)$$

5. Emparejamiento de una partícula (o antipartícula) en el estado inicial con números cuánticos \vec{p}, σ, n con una partícula (o antipartículas) en el estado final con números cuánticos \vec{p}', σ', n' :

$$a(\vec{p}', \sigma', n') \overline{a^\dagger(\vec{p}, \sigma, n)} = \overline{a^\dagger(\vec{p}', \sigma', n') a(\vec{p}, \sigma, n)} = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{n'n}$$

6. Emparejamiento de un campo $\psi_l(x)$ en $\mathcal{H}_i(x)$ con un campo adjunto $\psi_m^\dagger(y)$ en $\mathcal{H}_j(y)$:

$$\begin{aligned} \overline{\psi_l(x) \psi_m^\dagger(y)} &= \theta(x^0 - y^0) [\psi_l^+(x), \psi_m^{\dagger+}(y)]_{\mp} \pm \theta(y^0 - x^0) [\psi_m^{\dagger-}(y), \psi_l^-(x)]_{\mp} = \\ &= -i \Delta_F(x, y) \end{aligned}$$

Aquí Δ_F es el propagador de Feynman asociado al campo en concreto (recordemos que ambos deberán ser del mismo tipo, pues de otro modo los operadores creación/destrucción conmutan y la contracción se anula). En el caso de una partícula escalar neutra, se trata del propagador de Feynman de Klein-Gordon, $\Delta_F = D_F$, mientras que en el caso de un campo de Diraca tenemos el propagador de Dirac, $\Delta_F = S_F = (i\cancel{\partial} + m)D_F$.

La matriz S se obtiene multiplicando estos factores, integrando sobre las variables $x_1 \dots x_N$, sumando todos los posibles emparejamientos y sobre todos los tipos de interacción (términos en \mathcal{H}). Probablemente también harán falta términos numéricos adicionales, debidos a la combinatoria, que de momento no discutimos aquí.

Veamos cómo se construyen los diagramas, siguiendo las especificaciones de Weinberg. Los grafos consisten de vértices, consistiendo cada uno de un \mathcal{H}_i , y líneas, correspondientes al emparejamiento de campos y operadores de creación/destrucción.

1. El emparejamiento de una partícula final con un campo adjunto en uno de los \mathcal{H}_i viene representado por una línea que nace del vértice asociado a ese \mathcal{H}_i y sale del diagrama, llevando una flecha que apunta en sentido contrario al vértice.
2. El emparejamiento de una antipartícula final con un campo en uno de los \mathcal{H}_i viene representado por una línea que nace del vértice asociado a ese \mathcal{H}_i y sale del diagrama, llevando una flecha que apunta hacia el vértice.
3. El emparejamiento de una partícula inicial con un campo en uno de los \mathcal{H}_i viene representado por una línea que entra en el diagrama y acaba en el vértice asociado a ese \mathcal{H}_i , llevando una flecha que apunta en sentido contrario al vértice.
4. El emparejamiento de una antipartícula inicial con un campo adjunto en uno de los \mathcal{H}_i viene representado por una línea que entra en el diagrama y acaba en el vértice asociado a ese \mathcal{H}_i , llevando una flecha que apunta hacia el vértice.
5. El emparejamiento de una partícula (o antipartícula) final con una partícula (o antipartícula) inicial viene representado por una línea que entra y sale del diagrama sin tocar ningún vértice, con una flecha que lleva el mismo sentido (o el contrario).
6. El emparejamiento de un campo en $\mathcal{H}_i(x)$ con un campo adjunto en $\mathcal{H}_j(y)$ viene representado por una línea que une los vértices asociados a cada uno de los campos, llevando una flecha apuntando de y a x .

En el caso de partículas neutras que son sus propias antipartículas no se utilizan flechas.

$$\begin{array}{cccc}
\frac{e^{-ip'x} u_l^*(\vec{p}'\sigma'n')}{(2\pi)^{-3/2}} & \frac{e^{-ip'x} v_l(\vec{p}'\sigma'n')}{(2\pi)^{-3/2}} & \frac{e^{ipx} u_l(\vec{p}\sigma n)}{(2\pi)^{-3/2}} & \frac{e^{ipx} v_l^*(\vec{p}\sigma n)}{(2\pi)^{-3/2}} \\
\begin{array}{c} \times \longrightarrow \\ l,x \quad \vec{p}'\sigma'n' \end{array} & \begin{array}{c} \times \longleftarrow \\ l,x \quad \vec{p}'\sigma'n'^c \end{array} & \begin{array}{c} \longrightarrow \times \\ \vec{p}\sigma n \quad l \end{array} & \begin{array}{c} \longleftarrow \times \\ p\sigma n^c \quad l \end{array} \\
\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n} & -i\Delta_F(x, y) & & \\
\begin{array}{c} \longrightarrow \quad \longleftarrow \\ \vec{p}\sigma n \quad \vec{p}'\sigma'n' \quad \vec{p}\sigma n^c \vec{p}'\sigma'n'^c \end{array} & \begin{array}{c} \times \longleftarrow \times \end{array} & &
\end{array}$$

Espacio de momentos

El paso a las reglas en el espacio de momentos es sencillo. Para empezar, veamos que, una vez escritas todas las contracciones, se deben realizar N integrales extendidas al espacio de Minkowski en un diagrama de orden N . Vamos a demostrar que cada integral, habiendo una por vértice, contribuye con productos de deltas de Dirac. En cada término, el tipo de funciones que aparecen son exponenciales del tipo $e^{\pm ipx}$, términos asociados a partículas/antipartículas como $u(\vec{p}\sigma n)$ (que solo dependen del momento, no de la posición) y propagadores de Feynman. Weinberg demuestra que la forma más general de uno de estos propagadores es

$$\Delta_F^{lm}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{P_{lm}(q) e^{iq(x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon}$$

donde $P_{lm}(q)$ es un polinomio en los momentos que depende del tipo de partícula. Podemos sacar todos las funciones de los momentos fuera de las integrales en la posición, quedando dentro de estas productos de exponenciales. Cada una de estas integrales corresponde a la transformación de Fourier de 1, que da una delta de Dirac. Por tanto, en cada vértice tendremos una contribución del tipo

$$(2\pi)^4 \delta(\sum p + \sum q - \sum p' - \sum q')$$

donde $\sum p$ y $\sum p'$ denotan los momentos de las partículas entrando y saliendo del vértice, y $\sum q$ y $\sum q'$ representan momentos de líneas internas que entran o salen del vértice. Ahora, en vez de integrales sobre las posiciones, tenemos tantas integrales sobre los momentos q como líneas internas haya en el diagrama, provenientes de los propagadores. Las reglas para calcular contribuciones de la matriz S son ahora:

1. Se dibujan todos los diagramas del orden deseado, tal y como se dice en las reglas del espacio posición. Ahora, en vez de etiquetar cada vértice con una coordenada x , se asocia cada línea interna con un momento q off-shell, que se considera de manera convencional que fluye en el sentido de la flecha.
2. Por cada vértice de tipo i , se incluye un factor

$$-i(2\pi)^4 g_i \delta(\sum p + \sum q - \sum p' - \sum q')$$

Está claro que estas deltas aseguran la conservación del momento en cada vértice.

3. Las reglas para partículas que entran o salen del diagrama son las mismas que en el espacio de posiciones, pero sin las exponenciales.
4. Por cada línea interna lm , con la flecha apuntando hacia m y con momento q^μ , se incluye el factor que acompaña a la exponencial en el propagador de Feynman,

$$\frac{-i(2\pi)^4 P_{lm}(q)}{q^2 - m^2 - i\epsilon}$$

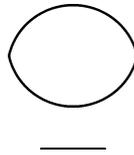
5. Se integra el producto de todos los factores sobre los cuádrimomentos asociados a las líneas internas, y se suma sobre todos los índices (l, m, etc).
6. Sumar los resultados obtenidos de este modo por cada diagrama de Feynman.
7. Signos y factores combinatorios que correspondan.

Comentarios

Nótese que, a la hora de realizar las contracciones, siempre escribimos diagramas como el siguiente:



Sin embargo, existe la posibilidad de que, en algunas teorías, podamos encontrar contracciones que representen diagramas como



Este último tipo de diagramas se puede demostrar que no contribuyen a la matriz S (salvo, tal vez, en fases globales). Por tanto, tan sólo han de computarse los diagramas totalmente conexos, definidos como aquellos en los que

en cada vértice aparece el mismo número de campos que en el hamiltoniano. Diagramas inconexos, como el segundo, no hay que tenerlos en cuenta.

Ejemplos

Modelos ϕ^3 y ϕ^4

Veamos cómo son las reglas de Feynman de un bosón escalar neutro de masa m con una autointeracción del tipo

$$\mathcal{H}_{int} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

o del tipo

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

con

$$\phi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dp^3}{(2E)^{1/2}} (a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx})$$

Estos hamiltonianos dan lugar a situaciones físicas muy distintas, pero las reglas de Feynman son las mismas para ambos, puesto que las posibles contracciones son las mismas. Además, este es un caso particularmente sencillo, puesto que al ser su propia antipartícula muchas de las reglas dadas son redundantes. Siguiendo las prescripciones dadas, obtenemos fácilmente:

$$\frac{e^{-ip'x}}{(2\pi)^{-3/2}(2E)^{1/2}} \quad \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{-3/2}(2E)^{1/2}} \quad \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n} \quad -iD_F(x, y)$$

Recordemos que el propagador de Feynman en este caso es

$$D_F = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon}$$

Estudiemos un caso particular del modelo ϕ^3 , yendo desde el elemento de matriz hasta el diagrama, para ver explícitamente todo lo que hemos ido

comentando a lo largo del trabajo. A orden λ^2 , y con dos bosones en el estado inicial y final, tenemos:

$$S_{\vec{p},\vec{p}';\vec{k},\vec{k}'} = \frac{(-i)^2}{2} \left(\frac{\lambda}{3!}\right)^2 \int d^4x \int d^4y \langle 0 | T[a(\vec{k})a(\vec{k}')\phi^3(x)\phi^3(y)a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}')] | 0 \rangle =$$

$$= \frac{(-i)^2}{2} \left(\frac{\lambda}{3!}\right)^2 \mathcal{C}$$

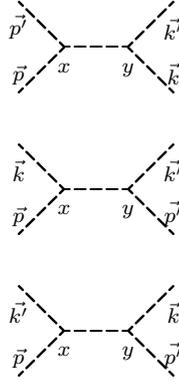
Donde por \mathcal{C} denotamos todas las posibles contracciones. Existen tres probabilidades a la hora de hacer las contracciones, dependiendo de con la posición con la que se emparejan los operadores:

$$\mathcal{C} = \int d^4x \int d^4y \overbrace{a(\vec{k})a(\vec{k}')\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(x)a(\vec{p})a(\vec{p}')\phi(x)\phi(x)} +$$

$$+ \int d^4x \int d^4y \overbrace{a(\vec{k})a(\vec{k}')\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(x)\phi(x)\phi(x)a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}')} +$$

$$+ \int d^4x \int d^4y \overbrace{a(\vec{k})a(\vec{k}')\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(x)\phi(x)\phi(x)a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}')} +$$

Estas tres contracciones vienen representadas por los siguientes diagramas de Feynman:



Sustituyendo los valores de las contracciones y reordenando términos,

$$\mathcal{C} = \frac{1}{(2\pi)^6 \sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}E_{\vec{k}}E_{\vec{k}'}}} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} [e^{-ipx} e^{-ip'y} e^{iky} e^{ik'y} +$$

$$\begin{aligned}
& +e^{-ipx}e^{ikx}e^{-ip'y}e^{ik'y} + e^{-ipx}e^{ik'x}e^{-ip'y}e^{iky}] = \\
= & \frac{1}{(2\pi)^6\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}E_{\vec{k}}E_{\vec{k}'}}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon} \int d^4x \int d^4y [e^{-i(p+p'-q)x}e^{-i(q-k-k')y} + \\
& +e^{-i(p-k-q)x}e^{-i(q+p'-k')y} + e^{-i(p-k'-q)x}e^{-i(q+p'-k)y}] = \\
= & \frac{1}{(2\pi)^6\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}E_{\vec{k}}E_{\vec{k}'}}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon} [\delta(p+p'-q)\delta(q-k-k') + \\
& +\delta(p-k-q)\delta(q+p'-k') + \delta(p-k'-q)\delta(q+p'-k)] = \\
= & \frac{1}{(2\pi)^6\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}E_{\vec{k}}E_{\vec{k}'}}} \left[\frac{1}{(p+p')^2+m^2} + \frac{1}{(p-k)^2+m^2} + \frac{1}{(p-k')^2+m^2} \right]
\end{aligned}$$

Con este ejemplo, vemos condensado todo lo visto: del elemento de la matriz S, utilizando el teorema de Wick, hemos llegado a la expresión que habríamos escrito directamente a partir de los diagramas de Feynman, aplicando las reglas en el espacio de momentos.

Interacción Yukawa

Ya se ha comentado que se llama interacción Yukawa a la que tiene el hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{int} = g\bar{\psi}\phi\psi$$

donde

$$\psi = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}}u^s(p)e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^s v^s(p)e^{ipx})$$

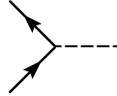
Las reglas de Feynman referente a bosones (reales y virtuales) son las mismas que en el ejemplo anterior. En el espacio de momentos, las reglas para fermiones son:

$$\begin{array}{cccc}
\frac{u^s(p)}{(2\pi)^{3/2}} & \frac{\bar{v}^s(p)}{(2\pi)^{3/2}} & \frac{\bar{u}^s(p)}{(2\pi)^{3/2}} & \frac{v^s(p)}{(2\pi)^{3/2}} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \times \\ \times \xleftarrow{p} \end{array} & \begin{array}{c} \xleftarrow{p} \times \\ \times \xrightarrow{p} \end{array} & \begin{array}{c} \times \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{p} \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \xleftarrow{p} \\ \xrightarrow{p} \times \end{array}
\end{array}$$

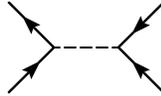
$$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



$$-ig$$



El tipo de diagramas posibles son los mismos que en QED, analizados durante el curso, pero mucho más simples, pues la interacción está mediada por un bosón escalar y no por uno vectorial. Por ejemplo, scattering fermión-fermion:



Electrodinámica Cuántica

El hamiltoniano de QED es:

$$\mathcal{H}_{int} = e \int \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu d^3x$$

Las reglas para fermiones de QED son las mismas que en el caso de Yukawa. El campo A_μ viene descrito por

$$A_\mu = \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} \epsilon_\mu^r(p) e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger \epsilon_\mu^{r*}(p) e^{ipx})$$

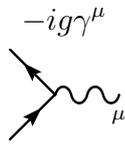
En el gauge de Coulomb, es inmediato comprobar que las reglas para el fotón son:

$$\epsilon_\mu(p) \quad \epsilon_\mu^*(p)$$

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$$



Nótese que ahora al vértice no le corresponde tan solo un término $-ie$, sino también γ^μ :



References

- [1] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”
- [2] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory”