

Vectores y pseudovectores para físicos, y algo más...

Fco. Cordobés Aguilar

Física Básica
Conceptos y Métodos

Enero de 2005 / Evaluación de la asignatura

Outline

¿Qué hace la física?

Vectores

Seudovectores

Tensor de rango 2

Bibliografía

La Física es una ciencia y como tal trata de describir la naturaleza mediante **modelos matemáticos**; siendo capaz de predecir lo que ocurrirá cuando las mismas condiciones se **repitan**.

- Espacio(en el que no hay materia ni campos que alteren su estado)

Homogeneidad Equivalencia de todas sus partes.

Isotropía Equivalencia de todas las direcciones.

Métrica Euclídea

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

- Tiempo

Homogeneidad Equivalencia de todos los instantes de tiempo.

Simetría de las Leyes Físicas

Simetría Algo es simétrico si tras someterlo a una operación éste sigue teniendo las mismas características.

Experimentalmente se comprueba que un sistema evoluciona invarianteamente bajo traslaciones o rotaciones, i.e., un sistema es simétrico respecto a traslaciones y/o rotaciones.

Siempre y cuando por sistema entendamos todos aquellos elementos cuya intervención mediante la interacción con los demás no sea despreciable.

Postulado de Relatividad

Todo fenómeno físico transcurre del mismo modo en todos los sistemas de referencia inerciales si las condiciones iniciales son las mismas.

Definición según su ley de transformación

Un *vector* o *vector polar* es una magnitud que cumple las leyes del *álgebra vectorial*; caracterizada de forma única por 3 números reales (x^1, x^2, x^3) , las *componentes* del vector, y por la **Ley de Transformación** que rige como se transforman esas componentes respecto a un cambio de sistema de coordenadas.

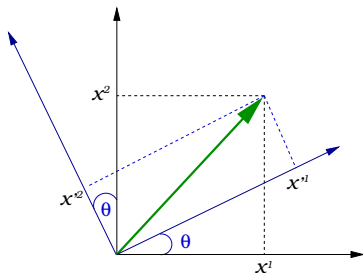
Dada una matriz de transformación $[A] = a_j^i$ la transformación de un sistema S a S' de las coordenadas será:

$$u'^i = \sum_{j=1}^n a_j^i u^j \xrightarrow{\text{matricialmente}} u' = Au$$

Ejemplo: rotación alrededor del eje OZ

Dada la matriz de transformación de un sistema S a otro S' rotado un ángulo fijo θ . Según la definición de vector, tendremos:

$$\begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \\ u'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \cos \theta + u^2 \sin \theta \\ -u^1 \sin \theta + u^2 \cos \theta \\ u^3 \end{pmatrix}$$



Ventajas de la formulación vectorial

El reformular las teorías Físicas en forma vectorial es un paso hacia la simplificación.

Ventajas:

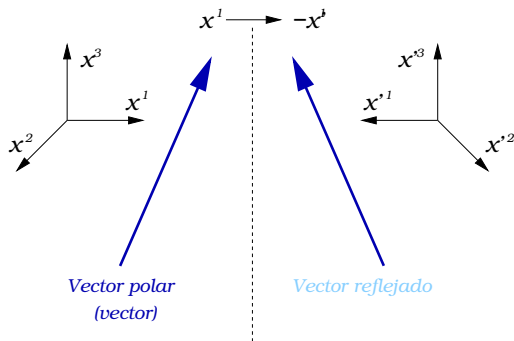
1. Independencia del sistema de referencia.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t + a_x \frac{t^2}{2} \\ y(t) &= y_0 + v_y t + a_y \frac{t^2}{2} \\ z(t) &= z_0 + v_z t + a_z \frac{t^2}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t + \vec{a}\frac{t^2}{2}$$

2. Sencillez, compacidad y elegancia.

Transformación de vectores: reflexión

$$\begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \\ u'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \\ u'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$



Asimetría de reflexión

Un *seudovector* o *vector axial* \vec{s} se transforma como un vector respecto de rotaciones del sistema de referencia pero se convierte en su opuesto $-\vec{s}$ cuando invertimos uno de los ejes: por ejemplo, el eje OX pasa a ser $-OX$.

La Ley de Transformación, dada una matriz de transformación $[A] = a_j^i$ es:

$$s'^i = \det A \sum_{j=1}^n a_j^i s^j \rightarrow s' = \det A A s$$

De donde una inversión se tiene cuando $\det A = -1$.

Álgebra de pseudovectores

$$[\textit{seudovector}] \times [\textit{seudovector}] = [\textit{seudovector}]$$

$$[\textit{vector}] \times [\textit{seudovector}] = [\textit{vector}]$$

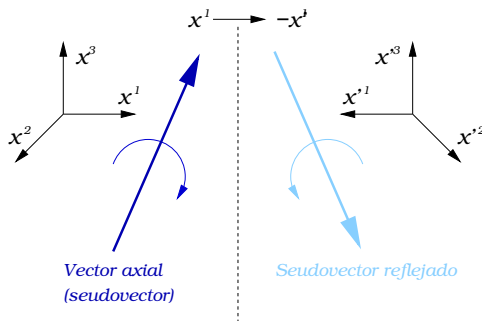
Una forma de obtener un pseudovector, el *momento angular* \vec{L} por ejemplo, es haciendo el producto vectorial de dos vectores *polares* \vec{r} y \vec{p} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Transformación de pseudovectores:

Reflejando la velocidad angular $\vec{\omega}$

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \omega'^3 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \omega'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ -\omega^2 \\ -\omega^3 \end{pmatrix}$$



La presión NO es escalar

Por definición:

$$d\vec{F} = p d\vec{S}$$

donde $d\vec{F}$ es un vector, p es la presión y $d\vec{S}$ es un pseudovector. Escribiendo la transformación de las componentes de S a S' :

$$dF'^i = \sum_{j=1}^n a_j^i dF^j = p' dS'^i = p' \det A \sum_{j=1}^n a_j^i dS^j$$

donde para que ambos miembros se transformen como un vector $p' = p \det A$, la presión es una magnitud *seudoescalar*; un pseudoescalar cambia de signo cuando se invierten los ejes, al igual que hacen los pseudovectores.

$$dF'^i = p [\det A]^2 \sum_{j=1}^n a_j^i dS^j = p \sum_{j=1}^n a_j^i dS^j$$

Cuando la dirección importa. . .

Un *tensor de segundo orden* es una cantidad especificada de forma única respecto a un sistema de coordenadas S dado por 9 números reales (las *componentes* del tensor) y cuya componente u_{lm} se transforma al cambiar de un sistema de coordenadas rectangular S a S' según:

$$u'_{ij} = \alpha_{j'l} \alpha_{j'm} u_{lm} \quad (1)$$

donde u'_{ij} son las nuevas componente en S' y $\alpha_{j'l}$ es el coseno del ángulo entre el eje i de S' y el eje l de S (igual para $\alpha_{j'm}$).

Tensor de Inercia: $I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$

Bibliografía



R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands.

Mechanics, radiation and heat, volume 1 of *The Feynman Lectures on Physics*.

Addison-Wesley, commemorative issue edition, 1989.



Manuel R. Ortega Girón.

Mecánica 1, volume I of *Lecciones de Física*.

Manuel R. Ortega Girón, Dpto. Física Aplicada, Universidad de Córdoba, viii edition, Enero 1998.



Eric Weisstein.

World of science, a wolfram web resource, 2004.

URL <http://scienceworld.wolfram.com/>.



Wikipedia.

Wikipedia, 2004.

URL <http://en.wikipedia.org>.