Vectores y seudovectores para físicos

y algo más...

Francisco Cordobés Aguilar

Enero de 2005
Evaluación de la asignatura

Nature is the way it is, not the way physics sees it

Fco. Cordobés Aguilar

Física Básica
Conceptos y Métodos

Índice

1. ¿Qué hace la física? (2 min)

La Física es una ciencia y como tal trata de describir la naturaleza mediante **modelos matemáticos**; siendo capaz de predecir lo que ocurrirá cuando las mismas condiciones se **repitan**.

- Espacio(en el que no hay materia ni campos que alteren su estado)

  Homegeneidad Equivalencia de todas sus partes.

  Isotropía Equivalencia de todas las direcciones.

  Métrica Euclídea

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \tag{1}$$

- Tiempo

  Homogeneidad Equivalencia de todos los instántes de tiempo.

1.1. Simetría de las Leyes Físicas

Simetría Algo es simétrico si tras someterlo a una operación éste sigue teniendo las mismas características.

Experimentalmente se comprueba que un sistema evoluciona invariantemente bajo traslaciones o rotaciones, i.e., un sistema es simétrico respecto a traslaciones y/o rotaciones.

Siempre y cuando por sistema entendamos todos aquellos elementos cuya intervención mediante la interacción con los demás no sea despreciable.

Postulado 1. *Todo fenómeno físico transcurre del mismo modo en todos los sistemas de referencia inerciales si las condiciones iniciales son las mismas.*

En Mecánica Clásica la simetría de un sistema físico conduce a **leyes de conservación**; por ejemplo, la conservación del momento angular $\vec{L}$ es consecuencia directa de la simetría respecto a rotación. Esto significa que ciertas magnitudes observables, como L^2, o magnitudes geométricas, como el módulo de un vector o la distancia entre dos puntos, son **invariantes** bajo rotaciones.

Siempre que aparece una simetría respecto de una operación ésta es un *grupo*. La *Teoría de Grupos* es una herramienta matemática que ayuda a los físicos a manejar las magnitudes invariantes y las simetrías que aparecen en los fenómenos físicos. Esta herramienta ayuda y facilita la unificación y la formalizción de las teorías físicas.

Un ejemplo puede ser el grupo $SO(3)$ de rotaciones a través de un ángulo fijo en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor de un eje dado. $SO(3)$ significa *special orthogonal rotations in three dimensions* es decir *rotaciones ortogonales en tres dimensiones*; donde el término *special* se aplica a aquellas matrices de transformación A con $A^t = A^{-1}$, matrices ortogonales, tales que $\det A = +1$.

Las matrices de $SO(3)$ son aquellas para las que cuando aplicamos la transformación a un seudovector éste no se invierte. Ver (3). El grupo $O(3)$ consiste de todas aquellas rotaciones finitas alrededor de un eje sobre un ángulo fijo acompañadas de una relfexión de uno de los ejes, así $detA = -1$ y los seudovectores se invierten.

2. Vectores (3 min)

2.1. Definición según su ley de transformación

Un *vector* o *vector polar* es una magnitud que cumple las leyes del *álgebra vectorial*; caracterizada de forma única por 3 números reales (x^1, x^2, x^3), las *componentes* del vector, y por la **Ley de Transformación** que rige como se transforman esas componentes respecto a un cambio de sistema de coordenadas.

Dada una matriz de transformación $[A] = a^i_j$ la transformación de un sistema S a S' de las coordenadas será:

$$u'^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j u^j \overset{matricialmente}{\longrightarrow} u' = Au \tag{2}$$

2.2. Ejemplo: rotación alrededor del eje OZ

Dada la matriz de transformación de un sistema S a otro S' rotado un ángulo fijo θ. Según la definicion de vector, tendremos:

$$\begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \\ u'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1\cos\theta + u^2\sin\theta \\ -u^1\sin\theta + u^2\cos\theta \\ u^3 \end{pmatrix}$$

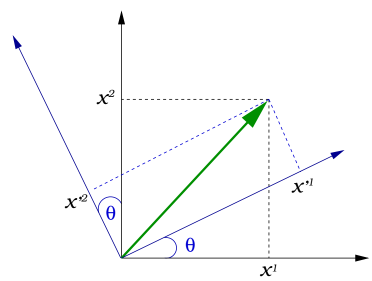

Figura 1: Rotación alrededor del eje OZ.

La matriz A pertenece al grupo $SO(3)$.

2.3. Ventajas de la formulación vectorial

El reformular las teorías Físicas en forma vectorial es un paso hacia la simplificación.
Ventajas:

1. Independencia del sistema de referencia.

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x_0 + v_x t + a_x \frac{t^2}{2} \\ y(t) = y_0 + v_y t + a_y \frac{t^2}{2} \\ z(t) = z_0 + v_z t + a_z \frac{t^2}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t + \vec{a}\frac{t^2}{2}$$

2. Sencillez, compacidad y elegancia.

2.4. Transformación de vectores: reflexión

$$\begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \\ u'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \\ u'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz perteneciente a $O(3)$ ya que $\det A = -1$ y representa una reflexión.

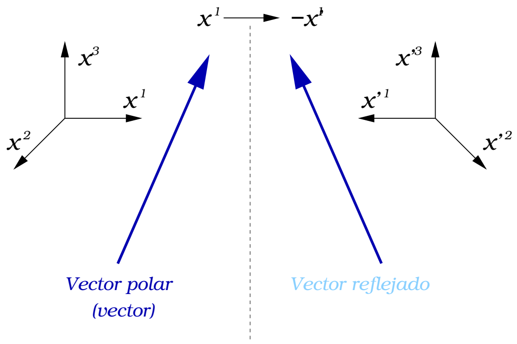

Figura 2: Vector polar reflejado.

3. Seudovectores (3 min)

3.1. Asimetría de reflexión

Un *seudovector* o *vector axial* $\vec{s}$ se transforma como un vector respecto de rotaciones del sistema de referencia pero se convierte en su opuesto $-\vec{s}$ cuando invertimos uno de los ejes: por ejemplo, el eje OX pasa a ser $-OX$.

La Ley de Transformación, dada una matriz de transformación $[A] = a^i_j$ es:

$$s'^i = \det A \sum_{j=1}^{n} a^i_j s^j \rightarrow s' = \det AAs \tag{3}$$

La matriz de transformación es una matriz ortogonal.

De donde una inversión se tiene cuando $\det A = -1$, es decir, cuando la matriz de transformación pertenezca al grupo de transformaciones $O(3)$. Si sólo se trata de una rotación simple alrededor de un ángulo fijo tendremos $A \in SO(3)$.

3.2. Álgebra de seudovectores

$$[seudovector] \times [seudovector] = [seudovector]$$

$$[vector] \times [seudovector] = [vector]$$

Una forma de obtener un seudovector, el *momento angular* $\vec{L}$ por ejemplo, es haciendo el producto vectorial de dos vectores *polares* $\vec{r}$ y $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

3.3. Transformación de seudovectores:

Reflejando la velocidad angular $\vec{\omega}$

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \omega'^3 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \omega'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ -\omega^2 \\ -\omega^3 \end{pmatrix}$$

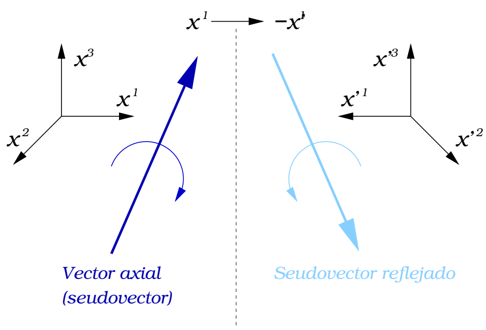

Figura 3: Velocidad angular $\vec{\omega}$ reflejada.

3.4. La presión NO es escalar

Por definición:

$$d\vec{F} = p d\vec{S}$$

donde $d\vec{F}$ es un vector, p es la presión y $d\vec{S}$ es un seudovector. Escribiendo la transformación de las componentes de S a S':

$$dF'^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j dF^j = p' dS'^i = p' \det A \sum_{j=1}^{n} a^i_j dS^j$$

donde para que ambos miembros se transformen como un vector $p' = p \det A$, la presión es una magnitud *seudoescalar*; un seudoescalar cambia de signo cuando se invierten los ejes, al igual que hacen los seudovectores.

$$dF'^i = p \left[\det A\right]^2 \sum_{j=1}^{n} a^i_j dS^j = p \sum_{j=1}^{n} a^i_j dS^j$$

4. Tensores (1 min)

4.1. Tensor de rango 2

4.1.1. Cuando la dirección importa...

Un *tensor de segundo orden* es una cantidad especificada de forma única respecto a un sistema de coordenadas S dado por 9 números reales(las *componentes* del tensor) y cuya componente u_{lm} se transforma al cambiar de un sistema de coordenadas rectangular S a S' según:

$$u'_{ij} = \alpha_{i'l} \alpha_{j'm} u_{lm} \tag{4}$$

donde u'_{ij} son las nuevas componente en S' y $\alpha_{i'l}$ es el coseno del ángulo entre el eje i de S' y el eje l de S(igual para $\alpha_{j'm}$).

4.2. Tensor de Inercia

El Tensor de Inercia es un tensor de rango 2 cuyas componentes puestas en forma matricial sirven para relacionar las componentes del momento angular con las de la velocidad angular.

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{5}$$

Cada una de las componentes del momento angular es una combinación lineal de las componentes de la velocidad angular.

Referencias

[1] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Essential Mathematical Methods for Physicists.* Elsevier, international edition, 2001.

[2] S.P.Ñóvikov B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko. *Geometría de las superficies, de los grupos de transformaciones y de los campos.*, volume I of *Geometría moderna, métodos y aplicaciones.* Ed. URSS, Moscú, 2000.

[3] A. I. Borisenko and I. E. Tarapov. *Vector and Tensor Analysis with applications.* Dover Publications, New York, first edition, 1968.

[4] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *Mechanics, radiation and heat*, volume 1 of *The Feynman Lectures on Physics.* Addison-Wesley, commemorative issue edition, 1989.

[5] Manuel R. Ortega Girón. *Mecánica 1*, volume I of *Lecciones de Física.* Manuel R. Ortega Girón, Dpto. Física Aplicada, Universidad de Córdoba, viii edition, Enero 1998.

[6] Manuel R. Ortega Girón. *Mecánica 2*, volume I of *Lecciones de Física.* Manuel R. Ortega Girón, Dpto. Física Aplicada, Universidad de Córdoba, viii edition, Enero 2000.

[7] Patricio T. Díaz Pazos. Principios de simetría, 2004.

[8] M. Postnikov. *Analytic Geometry*, volume I of *Lectures in Geometry.* Ed. URSS, Moscow, 1994.

[9] Paul A. Tipler. *Física para la ciencia y la tecnología*, volume 1. Ed. Reverté S.A., iv edition, 1999.

[10] Eric Weisstein. World of science, a wolfram web resource, 2004.

[11] Wikipedia. Wikipedia, 2004.