Teoría de Kaluza-Klein

Gravitación

Luis Javier Tarrío Barreiro

Teoría de Kaluza-Klein

Luis Javier Tarrío Barreiro

18 de julio de 2006

1. Introducción

En 1921 el físico Theodor Kaluza propuso una teoría que intentaba unificar bajo una sóla la gravitación y el electromagnetismo. Para ello supuso un espacio constituído por cinco dimensiones; las cuatro primeras eran una coordenada temporal y tres espaciales, ya conocidas por entonces, pero la quinta resultaba un misterio. Suponer su existencia implica una cuestión importante: ¿por qué no ha sido observada nunca?

Existían fenómenos experimentales que hacían tener en cuenta el tiempo entre las coordenadas geométricas, básicamente debidos al electromagnetismo; sin embargo nada parecía requerir la necesidad de una quinta dimensión adicional para explicar lo que ocurría. Ante este problema Kaluza optó por suponer que, ya que esa quinta dimensión no había sido observada, debía ser porque las magnitudes físicas no tenían ninguna clase de dependencia con ella, a pesar de su (posible) existencia, anulando así, en la teoría, toda dependencia con esta nueva variable.

Trabajando con esta premisa Kaluza obtuvo las ecuaciones de la gravitación y del electromagnetismo sin más que suponer:

- Independencia de las magnitudes con la quinta coordenada, sin que haya ningún mecanismo que explique por qué sí existe dependencia con las cuatro primeras y no con la quinta.
- La extensión de la teoría de la relatividad general de Einstein es minima, es decir, no se introducen nuevas matemáticas, sólo se toma el caso de cinco dimensiones.
- La teoría es puramente geométrica, es decir, el tensor de Einstein en cinco dimensiones contiene la gravitación y el electromagnetismo sin necesidad de incluír un tensor energía-momento generalizado *ad hoc*.

Una posible explicación para la primera de estas suposiciones fue la aportación de Oskar Klein a la teoría, en 1926. Lo que hizo fue suponer que esta quinta coordenada era compacta con topología circular, de forma que las posibles dependencias en la quinta coordenada son periódicas y se pueden expandir en serie de Fourier; suponiendo la escala de compactación muy pequeña, uno se puede quedar sólo con el primer término de la serie. La intención original de Klein era explicar con esto la cuantificación de la carga, pero surgieron algunos problemas que se comenta al final del trabajo.

La extensión a cinco dimensiones requiere alguna forma de poder diferenciar las magnitudes pentadimensionales de las tetradimensionales. Para ello introducimos la siguiente notación: las magnitudes marcadas con un circunflejo se refieren al sistema con cinco dimensiones, mientras que si carecen de él al de cuatro; de este modo tenemos que $\hat{R} \neq R$. Para marcar los índices mantenemos la notación de letras griegas (α, $\beta\ldots$) para los índices que van de 0 a 3, e introducimos los índices de letras latinas mayúsculas (A, $B\ldots$) para los que van de 0 a 4, siendo 4 la nueva dimensión.

Por último, hablar de una teoría puramente geométrica quiere decir que las ecuaciones que estamos buscando son $\hat{G}_{AB}=0$, o equivalentemente, $\hat{R}_{AB}=0$, siendo éstos los tensores de Einstein y Ricci pentadimensionales, respectivamente. Lo que queremos es expresar esto en función de cantidades tetradimensionales y obtener las ecuaciones de Maxwell y de la gravitación de Einstein; es decir, de un universo con cinco dimensiones y vacío encontrar las ecuaciones de la gravitación y el electromagnetismo en las cuatro dimensiones observables.

2. Métrica

La forma de parametrizar la métrica tiene bastante importancia, ya que de ella surgirá toda la estructura de los símbolos de Christoffel, y por tanto también de los tensores de Riemann y Ricci, así como el escalar de curvatura. Por tanto, la elección de la forma de la métrica tiene implicaciones inmediatas en la forma de las ecuaciones que encontraremos al final al obtener la ecuación de Einstein.

En nuestra métrica pentadimensional tendremos que tener presente la métrica tetradimensional convencional $g_{\alpha\beta}$, además de un vector relacionado de alguna manera con el campo del fotón A_α, si queremos encontrar también las ecuaciones del electromagnetismo. Así mismo, se debe incluír un campo escalar ϕ. Otra forma de ver la necesidad de estas magnitudes es mediante el contaje de grados de libertad. Nuestra métrica pentadimensional $\hat{g}_{AB}$ tendrá un total de 15 grados de libertad dado su carácter simétrico. La métrica tetradimensional $g_{\alpha\beta}$ ya da cuenta de 10 de esos grados de libertad, siendo los otros cinco los campos A_α y ϕ.

Por tanto, en la parte de la métrica que hace referencia a las cuatro coordenadas habituales (una temporal y tres espaciales) tendremos que tener, por consistencia tensorial, $g_{\alpha\beta}(1+f(\phi,A^2))+A_\alpha A_\beta h(\phi,A^2)$, de forma que si hacemos $A_\mu=0$ y $\phi=0$ obtengamos la métrica tetradimensional.

Es natural suponer que en la parte de la métrica que mezcla la quinta dimensión introducida por Klein y las cuatro dimensiones convencionales tendremos la expresión $A_\alpha j(\phi,A^2)$ que se anule cuando $A_\mu=0$ ó $\phi=0$.

Para la componente de la métrica correspondiente únicamente a la quinta dimensión (en la diagonal, pues) tendremos $l(\phi,A^2)$ que, como antes, se anula si $\phi=0$.

La forma empleada aquí para parametrizar la métrica es aquella en la que las funciones anteriormente descritas toman su forma más simple, es decir

$$\hat{g}_{AB}=\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}+k^2\phi^2A_\alpha A_\beta & k\phi^2A_\alpha \\ k\phi^2A_\beta & \phi^2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde se puede ver que el factor k acompaña al campo vectorial A_μ, de forma que las unidades de k son las inversas a las del campo A_μ, llevando las unidades de la métrica los factores ϕ^2. Esta es la misma métrica que se toma en la referencia [1].

Para encontrar la matriz inversa empleamos la ecuación $\hat{g}_{AB}\hat{g}^{BC}=\delta_A^C$. Como sabemos que en la parte cuadridimensional nos tiene que aparecer $g^{\beta\gamma}$, lo cual, contraído con la métrica $g_{\alpha\beta}$, ya nos da una función delta en los cuatro primeros términos de la diagonal. Para el quinto tendrá que aparecer el término ϕ^{-2}, con lo que se postula una métrica inversa de la forma

$$\hat{g}^{MN}=\begin{pmatrix} g^{\mu\nu}+k^2A^\mu A^\nu F(\phi^2,k^2A^2) & kA^\mu G(\phi^2,k^2A^2) \\ kA^\nu G(\phi^2,k^2A^2) & \phi^{-2}+H(\phi^2,k^2A^2) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

con el cálculo directo se obtiene, finalmente

$$\hat{g}^{MN} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -kA^{\nu} \\ -kA^{\mu} & \phi^{-2} + k^2 A^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

3. Símbolos de Christoffel

Una vez elegida la métrica con la que vamos a trabajar y calculada su inversa podemos hallar los símbolos de Christoffel para esta teoría. Para ello aplicamos la definición

$$\hat{\Gamma}^{C}_{AB} = \frac{\hat{g}^{CD}}{2}\left(\hat{\partial}_A \hat{g}_{DB} + \hat{\partial}_B \hat{g}_{AD} - \hat{\partial}_D \hat{g}_{AB}\right). \tag{4}$$

Un ejemplo de cómo se lleva a cabo el cálculo es

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{\alpha}_{4\beta} = \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta 4} &= \frac{\hat{g}^{\alpha D}}{2}\left(\underbrace{\hat{\partial}_4 \hat{g}_{D\beta}}_{=0} + \hat{\partial}_\beta \hat{g}_{4D} - \hat{\partial}_D \hat{g}_{4\beta}\right) \\ &= \frac{\hat{g}^{\alpha\delta}}{2}\left(\hat{\partial}_\beta \hat{g}_{4\delta} - \hat{\partial}_\delta \hat{g}_{4\beta}\right) + \frac{\hat{g}^{\alpha 4}}{2}\left(\hat{\partial}_\beta \hat{g}_{44} - \underbrace{\hat{\partial}_4 \hat{g}_{4\beta}}_{=0}\right) \\ &= \frac{g^{\alpha\delta}}{2}\left[\partial_\beta\left(k\phi^2 A_\delta\right) - \partial_\delta\left(k\phi^2 A_\beta\right)\right] - \frac{kA^\alpha}{2}\partial_\beta \phi^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Los símbolos de Christoffel obtenidos, tras un cálculo similar para todos ellos, son

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{k^2 g^{\alpha\delta}}{2}\left[\partial_\beta\left(\phi^2 A_\delta A_\gamma\right) + \partial_\gamma\left(\phi^2 A_\beta A_\delta\right) - \partial_\delta\left(\phi^2 A_\beta A_\gamma\right)\right] \\ &\quad -\frac{k^2 A^\alpha}{2}\left[\partial_\beta\left(\phi^2 A_\gamma\right) + \partial_\gamma\left(\phi^2 A_\beta\right)\right], \end{aligned} \tag{6}$$

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}_{4\beta} = \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta 4} = \frac{g^{\alpha\delta}}{2}\left[\partial_\beta\left(k\phi^2 A_\delta\right) - \partial_\delta\left(k\phi^2 A_\beta\right)\right] - \frac{kA^\alpha}{2}\partial_\beta\phi^2, \tag{7}$$

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}_{44} = -\frac{g^{\alpha\delta}}{2}\partial_\delta\phi^2, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{4}_{\alpha\beta} &= \frac{k^2\phi^{-2} + k^3 A^2}{2}\left[\partial_\alpha\left(\phi^2 A_\beta\right) + \partial_\beta\left(\phi^2 A_\alpha\right)\right] - kA_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \\ &\quad -\frac{k^3 A^\delta}{2}\left[\partial_\alpha\left(\phi^2 A_\delta A_\beta\right) + \partial_\beta\left(\phi^2 A_\alpha A_\delta\right) - \partial_\delta\left(\phi^2 A_\delta A_\alpha \beta\right)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

$$\hat{\Gamma}^{4}_{4\beta} = \hat{\Gamma}^{4}_{\beta 4} = \frac{\phi^{-2} + k^2 A^2}{2}\partial_\beta\phi^2 - \frac{k^2 A^\delta}{2}\left[\partial_\beta\left(\phi^2 A_\delta\right) - \partial_\delta\left(\phi^2 A_\beta\right)\right], \tag{10}$$

$$\hat{\Gamma}^{4}_{44} = \frac{kA^\delta}{2}\partial_\delta\phi^2. \tag{11}$$

Estas expresiones son un poco tediosas pero aún se pueden simplificar un poco teniendo en cuenta ciertas propiedades y definiciones. Por ejemplo, podemos emplear la métrica tetradimensional para subir algunos índices en la forma habitual, así tenemos que $g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^2 = \partial^\mu\phi^2$ o $g^{\mu\nu}A_\nu = A^\mu$. Sin embargo hay que tener cuidado cuando el índice que queremos subir está dentro de una derivada, ya que en ese caso tenemos que tener en cuenta que la derivada que estamos tomando no es covariante, es decir

$$g^{\mu\nu}\partial_\gamma A_\nu = \partial_\gamma A^\mu - A_\nu \partial_\gamma g^{\mu\nu}, \tag{12}$$

donde $\partial_\gamma g^{\mu\nu}$ se puede calcular con $\partial_\gamma g^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\lambda} g^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\gamma\lambda} g^{\mu\lambda} = \nabla_\gamma g^{\mu\nu} = 0$ por la definición de derivada covariante.

Entonces, desarrollando las derivadas que aparecen en las ecuaciones para los símbolos de Christoffel y empleando algunas métricas para subir índices se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{k^2\phi^2}{2} g^{\alpha\delta} \left(F_{\beta\delta} A_\gamma + F_{\gamma\delta} A_\beta\right) + \frac{k^2}{2} A_\beta A_\gamma \partial^\alpha \phi^2, && (13)\\
\hat{\Gamma}^{\alpha}_{4\beta} = \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta 4} &= \frac{k}{2}\left(\phi^2 g^{\alpha\eta} F_{\beta\eta} - A_\beta \partial^\alpha \phi^2\right), && (14)\\
\hat{\Gamma}^{\alpha}_{44} &= -\frac{\partial^\alpha \phi^2}{2}, && (15)\\
\hat{\Gamma}^{4}_{\alpha\beta} &= \frac{k}{2\phi^2}\left(A_\beta \partial_\alpha \phi^2 + A_\alpha \partial_\beta \phi^2\right) + \frac{k}{2}\left(\nabla_\alpha A_\beta + \nabla_\beta A_\alpha\right) \\
&\quad -\frac{k^3}{2} A^\lambda \phi^2 \left(F_{\alpha\lambda} A_\beta + F_{\beta\lambda} A_\alpha - A_\alpha A_\beta \partial_\lambda \phi^2\right), && (16)\\
\hat{\Gamma}^{4}_{4\beta} = \hat{\Gamma}^{4}_{\beta 4} &= \frac{1}{2\phi^2} \partial_\beta \phi^2 + \frac{k^2\phi^2}{2} A^\nu F_{\nu\beta} + \frac{k^2}{2} A_\beta A^\nu \partial_\nu \phi^2 && (17)\\
\hat{\Gamma}^{4}_{44} &= \frac{k}{2} A^\epsilon \partial_\epsilon \phi^2. && (18)
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son menos engorrosas que las anteriores y en ellas hemos definido el tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Comentarios sobre $F_{\mu\nu}$

Sobre el tensor $F_{\mu\nu}$ se hace necesario realizar algunos comentarios importantes a la hora del cálculo del tensor de Ricci, pues son cuestiones que aparecen durante el cálculo y conviene tener presentes.

- La primera propiedad es muy conocida, y es que este tensor es antisimétrico en sus índices, es decir, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.
- La forma de subir un índice no es trivial, ya que $g^{\alpha\mu} F_{\mu\nu} \neq F^{\alpha}{}_{\nu} = \partial^\alpha A_\nu - \partial_\nu A^\alpha$; la demostración es sencilla
$$g^{\alpha\mu} F_{\mu\nu} = g^{\alpha\mu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \partial^\alpha A_\nu - g^{\alpha\mu}\partial_\nu A_\mu = \partial^\alpha A_\nu - \partial_\nu A^\alpha + A_\mu \partial_\nu g^{\alpha\mu}, \quad (19)$$
donde se ha utilizado la ecuación (12).
- A pesar de lo anterior, subir dos índices sí es sencillo, ya que $g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} = F^{\alpha\beta}$; la demostración también es sencilla
$$\begin{aligned}
g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} &= g^{\alpha\mu}(\partial^\alpha A_\nu - \partial_\nu A^\alpha + A_\mu \partial_\nu g^{\alpha\mu}) = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha + A_\mu \partial^\beta g^{\alpha\mu} - A_\nu \partial^\alpha g^{\beta\nu} \\
&= F^{\alpha\beta} + A_\epsilon \left[g^{\beta\lambda}\left(\Gamma^{\alpha}_{\lambda\eta} g^{\eta\epsilon} + \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\eta} g^{\alpha\eta}\right) - g^{\alpha\lambda}\left(\Gamma^{\beta}_{\lambda\eta} g^{\eta\epsilon} + \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\eta} g^{\beta\eta}\right)\right] = F^{\alpha\beta},
\end{aligned} \quad (20)$$
donde se ha aplicado la definición de derivada covariante. Es necesario adelantar esta circunstancia pues aparecerá posteriormente en el cálculo del tensor de Ricci.
- Además, por la misma situación que se da en el caso anterior, tenemos también la igualdad $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, de hecho, una vez sabido esto demostrar la propiedad anterior es trivial.
- De la tercera propiedad se saca $g^{\beta\nu} A^\alpha F_{\alpha\beta} = A_\sigma g^{\alpha\sigma} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} = A_\alpha F^{\alpha\nu}$.

4. Tensor de Ricci

Una vez calculados los símbolos de Christoffel los podemos emplear para calcular el tensor de Ricci usando la definición

$$\hat{R}_{MN} = \hat{\Gamma}^{L}_{MN,L} - \hat{\Gamma}^{L}_{ML,N} + \hat{\Gamma}^{L}_{SL}\hat{\Gamma}^{S}_{MN} - \hat{\Gamma}^{L}_{SN}\hat{\Gamma}^{S}_{ML}, \tag{21}$$

aplicando después las ecuaciones $\hat{R}_{MN} = 0$ para encontrar la dinámica del campo gravitatorio libre en cinco dimensiones. En realidad la ecuación sería $\hat{G}_{MN} = \hat{R}_{MN} - \frac{\hat{g}_{MN}}{2}\hat{R} = 0$, pero las dos ecuaciones son equivalentes siempre que no estemos en el caso bidimensional.

$\hat{R}_{44}$

De la ecuación para $\hat{R}_{44}$ se obtiene con simplificaciones básicas y teniendo en cuenta lo dicho anteriormente

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{44} &= \hat{\Gamma}^{\lambda}_{44,\lambda} + \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma\lambda}\hat{\Gamma}^{\sigma}_{44} + \hat{\Gamma}^{\lambda}_{4\lambda}\hat{\Gamma}^{4}_{44} - \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma 4}\hat{\Gamma}^{\sigma}_{4\lambda} - \hat{\Gamma}^{\lambda}_{44}\hat{\Gamma}^{4}_{4\lambda} \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\lambda\left(\partial^\lambda\phi^2\right) - \frac{\partial^\sigma\phi^2}{2}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} + \frac{k^2}{4}\phi^4 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{4\phi^2}\partial^\lambda\phi^2\partial_\lambda\phi^2 \\
&= -\partial_\lambda\left(\phi\partial^\lambda\phi\right) - \phi\partial^\sigma\phi\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} + \frac{k^2}{4}\phi^4 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi \\
&= -\phi\Box\phi + \frac{k^2}{4}\phi^4 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{22}$$

$\hat{R}_{\alpha 4}$

Para el término $\hat{R}_{\alpha 4}$ las cuentas aumentan considerablemente, pues los símbolos de Christoffel involucrados tienen más términos; los cálculos dan

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\alpha 4} &= \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha 4,\lambda} + \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma\lambda}\hat{\Gamma}^{\sigma}_{\alpha 4} + \hat{\Gamma}^{\lambda}_{4\lambda}\hat{\Gamma}^{4}_{\alpha 4} - \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma 4}\hat{\Gamma}^{\sigma}_{\alpha\lambda} - \hat{\Gamma}^{\lambda}_{44}\hat{\Gamma}^{4}_{\alpha\lambda} \\
&= \frac{k}{2}\partial^\eta\phi^2 F_{\alpha\eta} + \frac{k}{2}\phi^2\nabla^\lambda F_{\alpha\lambda} - \frac{k}{2}\Box\phi^2 A_\alpha + \frac{k^3}{4}\phi^4 F^{\eta\sigma}F_{\eta\sigma}A_\alpha \\
&\quad + \frac{k}{4\phi^2}\partial^\lambda\phi^2\partial_\lambda\phi^2 A_\alpha - \frac{k}{4}\partial^\lambda\phi^2\nabla_\lambda A_\alpha + \frac{k}{4}\partial^\lambda\nabla_\alpha A_\lambda \\
&= k\phi\partial^\eta\phi F_{\alpha\eta} + \frac{k}{2}\phi^2\nabla^\lambda F_{\alpha\lambda} - k\phi\Box\phi A_\alpha + \frac{k^3}{4}\phi^4 A_\alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{k}{2}\phi\partial^\lambda\phi F_{\lambda\alpha} \\
&= \frac{3}{2}k\phi\partial^\eta\phi F_{\alpha\eta} + \frac{k}{2}\phi^2\nabla^\lambda F_{\alpha\lambda} - k\phi\Box\phi A_\alpha + \frac{k^3}{4}\phi^4 A_\alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{23}$$

$\hat{R}_{\alpha\beta}$

Con el cálculo de $\hat{R}_{\alpha\beta}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\alpha\beta} =& \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta,\lambda} - (\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\lambda} + \hat{\Gamma}^{4}_{\alpha 4})_{,\beta} + (\hat{\Gamma}^{\lambda}_{4\lambda} + \hat{\Gamma}^{4}_{44})\hat{\Gamma}^{4}_{\alpha\beta} + (\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma\lambda} + \hat{\Gamma}^{4}_{\sigma 4})\hat{\Gamma}^{\sigma}_{\alpha\beta} \\
&- \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma\beta}\hat{\Gamma}^{\sigma}_{\alpha\lambda} - \hat{\Gamma}^{\lambda}_{4\beta}\hat{\Gamma}^{4}_{\alpha\lambda} - \hat{\Gamma}^{4}_{\sigma\beta}\hat{\Gamma}^{\sigma}_{\alpha 4} - \hat{\Gamma}^{4}_{4\beta}\hat{\Gamma}^{4}_{\alpha 4},
\end{aligned} \tag{24}$$

donde los términos entre paréntesis se calculan directamente con las expresiones de los símbolos de Christoffel, arrojando

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\lambda}+\hat{\Gamma}^{4}_{\alpha 4} &= \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}+\frac{1}{2\phi^2}\partial_\alpha\phi^2+k^2A_\alpha A_\eta\partial^\eta\phi^2, &(25)\\ \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma\lambda}+\hat{\Gamma}^{4}_{\sigma 4} &= \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda}+\frac{1}{2\phi^2}\partial_\sigma\phi^2+k^2A_\sigma A_\eta\partial^\eta\phi^2, &(26)\\ \hat{\Gamma}^{\lambda}_{4\lambda}+\hat{\Gamma}^{4}_{44} &= 0. &(27)\end{aligned}$$

Se puede ver que los términos que involucran a las ecuaciones (25) y (26) forman la derivada covariante $\nabla_\beta\left(\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\lambda}+\hat{\Gamma}^{4}_{\alpha 4}\right)=\nabla_\beta\left(\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}+\frac{1}{2\phi^2}\partial_\alpha\phi^2+k^2A_\alpha A_\eta\partial^\eta\phi^2\right)$; aquí aparece el término $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\beta}$, necesario a la hora de excribir el tensor de Ricci tetradimensional (los otros términos necesarios se deducen claramente de las expresiones (24) y (13)). Con todo esto se llega a

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\alpha\beta} =& R_{\alpha\beta}-\frac{1}{\phi}\nabla_\beta\left(\partial_\alpha\phi\right)-\frac{k^2\phi^2}{2}F_{\beta\eta}F_{\alpha}{}^{\eta}+\frac{3}{2}\phi k^2\partial^\lambda\left(F_{\alpha\lambda}A_\beta+F_{\beta\lambda}A_\alpha\right)\\ &+\frac{\phi^2k^2}{2}\left(\nabla^\lambda F_{\alpha\lambda}A_\beta+\nabla^\lambda F_{\beta\lambda}A_\alpha\right)-k^2A_\alpha A_\beta\phi\Box\phi+\frac{k^4\phi^4}{4}A_\alpha A_\beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{28}$$

5. Ecuaciones del movimiento

Si ahora imponemos la condición $\hat{R}_{MN}=0$ obtendremos las ecuaciones del movimiento que se desprenden de la metrica (1). Por tanto, si igualamos (22) a cero, se tiene

$$\Box\phi=\frac{k^2}{4}\phi^3F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \tag{29}$$

que es la ecuación que nos da la evolución del campo escalar ϕ y, como vemos, depende del potencial vector A_α por medio del factor F^2.

Aplicando la ecuación (29) en (23) se tiene

$$\hat{R}_{\alpha 4}=\frac{3}{2}k\phi\partial^\eta\phi F_{\alpha\eta}+\frac{k}{2}\phi^2\nabla^\lambda F_{\alpha\lambda}, \tag{30}$$

que, al igualar a cero, nos da

$$\nabla^\lambda F_{\lambda\alpha}=-3\frac{\partial^\lambda\phi}{\phi}F_{\lambda\alpha}. \tag{31}$$

Introduciendo los resultados (29) y (31) en (24), las componentes cuadridimensionales del tensor de Ricci se implifican a

$$\hat{R}_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{\phi}\nabla_\beta\left(\partial_\alpha\phi\right)-\frac{k^2\phi^2}{2}F_{\beta\eta}F_{\alpha}{}^{\eta}, \tag{32}$$

con lo que, igualando a cero, obtenemos

$$R_{\alpha\beta}=\frac{1}{\phi}\nabla_\beta\left(\partial_\alpha\phi\right)+\frac{k^2\phi^2}{2}F_{\beta\eta}F_{\alpha}{}^{\eta}. \tag{33}$$

Si le calculamos la traza a (33) y la multiplicamos por $\frac{g_{\alpha\beta}}{2}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R =&\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\frac{1}{2\phi}\Box\phi + \frac{k^2\phi^2}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \\ =&g_{\alpha\beta}\frac{1}{\phi}\Box\phi - g_{\alpha\beta}\frac{1}{2\phi}\Box\phi + \frac{k^2\phi^2}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \\ =&g_{\alpha\beta}\frac{1}{\phi}\Box\phi - g_{\alpha\beta}\frac{k^2\phi^2}{8}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{k^2\phi^2}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \\ =&g_{\alpha\beta}\frac{1}{\phi}\Box\phi + g_{\alpha\beta}\frac{k^2\phi^2}{2}\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4},\end{aligned} \tag{34}$$

donde hemos utilizado la ecuación (29) para obtener la expresión final.

Combinando (33) y (34) tenemos

$$G_{\alpha\beta} = \frac{k^2\phi^2}{2}T^{em}_{\alpha\beta} + \frac{1}{\phi}\left[\nabla_\alpha\left(\partial_\beta\phi\right) - g_{\alpha\beta}\Box\phi\right], \tag{35}$$

donde $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$ es el tensor de Einstein y $T^{em}_{\alpha\beta} \equiv F_\alpha{}^\gamma F_{\beta\gamma} - g_{\alpha\beta}\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4}$ es el tensor energia-momento del electromagnetismo.

Las ecuaciones (29) y (31) coinciden con las que se dan en [1], sin embargo la ecuación (35) presenta un signo negativo relativo en el término $G_{\alpha\beta}$ al compararla con la ecuación dada en la misma referencia.

6. Método variacional

Para el estudio de la teoría de Kaluza-Klein desde un punto de vista variacional necesitamos definir la acción a minimizar. Siguiendo la segunda suposición de Kaluza (que no necesitábamos fórmulas nuevas) partimos de la generalización a cinco dimensiones de la acción que da la ley de gravitación de Eistein

$$S \propto \int d^5x\sqrt{\hat{g}}\hat{R}, \tag{36}$$

donde la acción es proporcional a una integral pentadimensional, $\hat{R} \equiv \hat{g}^{MN}\hat{R}_{MN}$ es el escalar de curvatura y $\hat{g}$ es el determinante de la métrica (1). La constante de proporción se puede escoger de forma que la acción nos quede finalmente con los factores de la ecuación de Einstein.

Para el cálculo del determinante de la métrica primero se comprobó con una aplicación informática[1] que la expresión del determinante era totalmente independiente del campo A_μ, con lo cual podemos hacer $A_\mu = 0$ en la expresión (1) y obtener así $\hat{g} = g\phi^2$, con $g = \det(g_{\alpha\beta})$, de forma trivial.

6.1. Escalar de curvatura

La definición del escalar de curvatura a partir del tensor de Ricci es

$$\hat{R} = \hat{g}^{AB}\hat{R}_{AB} = \hat{g}^{\alpha\beta}\hat{R}_{\alpha\beta} + 2\hat{g}^{\alpha 4}\hat{R}_{\alpha 4} + \hat{g}^{44}\hat{R}_{44}, \tag{37}$$

[1] *Mathematica v5.2 for Students*

de donde, usando (3), (22), (23) y (28) se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{R} &= R - \frac{1}{\phi}\Box\phi - \frac{k^2\phi^2}{2}F^2 + \phi^2 k^2 \nabla^\lambda F_{\alpha\lambda}A^\alpha - k^2A^2\phi\Box\phi + \frac{k^2\phi^4}{4}A^2F^2 - 3k^2\phi\partial^\lambda\phi F_{\alpha\lambda}A^\alpha \\ &- k^2\phi^2\nabla^\lambda F_{\alpha\lambda}A^\alpha + 2k^2A^2\phi\Box\phi - \frac{k^4\phi^4}{2}A^2F^2 - \frac{1}{\phi}\Box\phi + \frac{k^2\phi^2}{4}F^2 - k^2A^2\phi\Box\phi + \frac{k^4\phi^4}{4}A^2F^2 \\ &= R - \frac{2}{\phi}\Box\phi - \frac{k^2\phi^2}{4}F^2,\end{aligned} \tag{38}$$

con $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

6.2. La acción de Kaluza-Klein

Empleando que $\frac{\Box\psi}{\psi} = \nabla_\lambda\left(\frac{\partial^\lambda\psi}{\psi}\right) + \frac{\partial_\lambda\psi\partial^\lambda\psi}{\psi^2}$ se puede expresar el segundo sumando de la ecuación anterior en función de una derivada total (que al escribir la expresión de la acción podemos ignorar) y otro término más, obteniendo

$$S = \int d^4x\sqrt{g}\phi\left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{2}{k^2\phi^2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{\phi^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right), \tag{39}$$

ecuación que coincide con la de la referencia [1] salvo por el factor numérico en el segundo sumando, que en dicho artículo vale 2/3 y los signos relativos entre la parte gravitatoria y el resto de la acción.

La constante presente en la expresión de la acción la hemos escogido igual a $\left(k^2\int dx^4\right)^{-1}$, de forma que así obtenemos un factor $1/(16\pi G)$ multiplicando al término con R (cuando expresamos k en función de la constante de gravitación universal mediante $k = 4\sqrt{\pi G}$) y eliminamos la integral en la quinta coordenada, que al ser una coordenada compacta tendrá un valor finito.

6.3. Reescalado conforme

Un gran inconveniente de la acción (39) es el factor ϕ global que, entre otras cosas, hace que la parte gravitatoria de dicha acción no esté en la forma canónica.

Esto se puede arreglar explotando la posibilidad de escoger una métrica con un factor general multiplicando a la que hemos empleado, en un proceso denominado reescalado conforme, es decir, explotamos la posibilidad de escoger la métrica para obtener, al final, el término gravitatorio en la expresión para la acción consecuente con la teoría de Einstein.

Antes de continuar con esto, lo que haremos será hacer el cambio $\phi^2 \to \phi$ en nuestra métrica original, de forma que el factor que aparece multiplicando a la forma canónica es un factor $\phi^{1/2}$. Con esto tenemos la métrica

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + k^2\phi A_\alpha A_\beta & k\phi A_\alpha \\ k\phi A_\beta & \phi \end{pmatrix}, \tag{40}$$

que hace que la ecuación (39) quede como

$$S = \int d^4x\sqrt{g}\phi^{1/2}\left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2k^2\phi^2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{\phi}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right). \tag{41}$$

Para evitar ese factor adicional se puede llevar a cabo lo que se llama un reescalado conforme, que consiste en redefinir la métrica como $\hat{g}'_{AB} = \Omega^2\hat{g}_{AB}$, donde Ω depende sólo de las cuatro primeras coordenadas. El efecto de ésto en el escalar de curvatura tetradimensional es

$$R \to R' = \Omega^{-2} \left(R + 6\frac{\Box\Omega}{\Omega} \right), \tag{42}$$

y sobre el determinante de $\hat{g}_{AB}$ es simplemente $\hat{g} \to \hat{g}' = \Omega^{10}\hat{g}$, por tanto, ahora el escalar de curvatura tetradimensional en la expresión (41) vendría multiplicado por un factor Ω^3, con lo que si escogemos $\Omega^2 = \phi^{-1/3}$ ya habríamos eliminado el factor $\phi^{1/2}$ no canónico que nos aparece. Al hacer esto veamos cómo nos varía el término que va con $\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi$ de la acción:

$$6\frac{\Box\Omega}{\Omega} = 6\nabla_\lambda \left(\frac{1}{\Omega}\nabla^\lambda\Omega \right) + 6\frac{\partial_\lambda\Omega\partial^\lambda\Omega}{\Omega^2} \to 6\frac{\partial_\lambda\phi^{-1/6}\partial^\lambda\phi^{-1/6}}{\phi^{-2/6}} = \frac{1}{6}\frac{\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi}{\phi^2}, \tag{43}$$

y por tanto la acción queda como

$$S = \int d^4x\sqrt{g} \left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{3k^2\phi^2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{\phi}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right), \tag{44}$$

donde vemos que, ahora sí, el factor gravitatorio de la acción aparece en su forma canónica. Al igual que antes, además de la inconsistencia en los signos, se tiene que el factor numérico del segundo sumando no coincide con el dado en la referencia [1] (con valor 1/6), que a su vez toma de [2].

7. Recuperando otras teorías

Teorías de Einstein y Maxwell

Una vez obtenidas las ecuaciones (29), (31) y (35) el siguiente paso a realizar es obtener las ecuaciones de Einstein y Maxwell usuales. Para ello tomaremos el caso en que $\phi = 1$, que es el caso que estudiaron originalmente tanto Kaluza como Klein. Al hacer ϕ una constante todas las expresiones en las que aparezca una derivada del campo escalar se ven simplificadas. Así, poniendo la magnitud del campo igual a la unidad, también nos desaparece la dependencia explícita en el campo, obteniendo unas ecuaciones que sólo dependen del tensor de Einstein y del tensor $F_{\mu\nu}$, a saber

$$G_{\alpha\beta} = \frac{k^2}{2}T^{em}_{\alpha\beta}, \tag{45}$$

$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0, \tag{46}$$

que no son otras sino las ecuaciones de Einstein y Maxwell (escribiendo, al igual que se hizo anteriormente, $k = 4\sqrt{\pi G}$). Esta sería un gran resultado si no fuese porque el caso $\phi = 1$ sólo es consistente con la ecuación (29) si $F^2 = 0$, lo que implicaría que el término de evolución del campo electromagnético presente en el lagrangiano se anula, desapareciendo el electromagnetismo de nuestras ecuaciones.

Si partimos de cualquiera de las expresiones para la acción que se han escrito antes, tomando $\phi = 1$, se obtiene

$$S = \int d^4x\sqrt{g} \left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right), \tag{47}$$

que no es más que la acción de gravedad acoplada al electromagnetismo.

Teoría de Brans-Dicke

Si no se toma $\phi = cte$ aparece un término correspondiente a un campo escalar además de los efectos electromagnéticos y gravitatorios. Este campo escalar resulta evidente al no considerar electromagnetismo alguno (haciendo $A_\mu = 0$). Sin tener en cuenta el potencial vector A_μ la métrica original con la que trabajamos es

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \phi^2 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

y, tomando el caso particular de (39), obtenemos la acción

$$S = \int d^4x\sqrt{g}\left(\frac{R\phi}{16\pi G} - \frac{2}{k^2}\frac{\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi}{\phi}\right), \tag{49}$$

que es la acción de Brans-Dicke si identificamos la constante adimensional (ω) de la teoría como $\omega = \frac{2}{k^2}$.

8. Coordenada compacta

Durante el desarrollo de la teoría que se hizo aquí se ignoró totalmente la quinta dimensión, pero no se explicó el por qué. Una posible explicación la dio Klein explicando que la dependencia con esa coordenada, de hecho, existía, pero era extremadamente pequeña. Para ello hizo dos suposiciones para una quinta dimensión de tipo espacial (al igual que las dimensiones generalmente etiquetadas con 1, 2 y 3):

- Posee una topología circular S^1.
- Su escala de longitudes es pequeña.

De la primera propiedad se desprende que cualquier cantidad $f(x, y)$ es periódica en la quinta dimensión, es decir, $f(x, y) = f(x, y + 2\pi r)$, con r el parámetro de escala de la quinta dimensión y $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Siendo esto así, cualquier cantidad se puede expandir en serie de Fourier, y en concreto la métrica $g_{\alpha\beta}(x, y)$ y los campos $A_\mu(x, y)$ y $\phi(x, y)$, quedándonos

$$g_{\alpha\beta}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_{\alpha\beta}^{(n)}(x)e^{\frac{iny}{r}}, \tag{50}$$

$$A_\alpha(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_\alpha^{(n)}(x)e^{\frac{iny}{r}}, \tag{51}$$

$$\phi(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi^{(n)}(x)e^{\frac{iny}{r}}. \tag{52}$$

De la mecánica cuántica sabemos que cada modo de la serie de Fourier lleva un momento en la dirección de la quinta dimensión de orden n/r, entonces, si el parámetro de escala r es pequeño (como propuso Klein) estos momentos serán de una magnitud enorme y sólo los modos con $n = 0$ serán observables. Si nos quedamos sólo con el modo fundamental de las cantidades es cuando la deducción de las ecuaciones (29), (31) y (35) hechas antes son válidas, ya que ahí no hay dependencia con la quinta dimensión; es el llamado *ansatz de Kaluza-Klein*.

Carga cuantizada

Además de explicar la asunción original de Kaluza sobre la no dependencia de las cantidades con la quinta coordenada, la idea de Klein de una dimensión compacta que conlleve una expansión en serie de Fourier nos da un posible mecanismo que explicase la cuantización de la carga. Si se introduce un campo de materia $\hat{\psi} = \sum_n \hat{\psi}^{(n)} \exp[iny/r]$ (que no sabemos a priori con qué se corresponde físicamente) y escribimos la acción correspondiente a este campo (sólo con parte cinética, sin interacciones) tenemos

$$S_{\hat{\psi}} = -\int d^4x \int dy \sqrt{\hat{g}} \partial^A \hat{\psi} \partial_A \hat{\psi}, \tag{53}$$

y podemos expandir de nuevo el campo $\hat{\psi}$ en serie de Taylor, para evaluar las derivadas según

$$\partial^A \hat{\psi} \partial_A \hat{\psi} = \left(\hat{g}^{AB} \partial_B \hat{\psi} \right) \partial_A \hat{\psi} = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \hat{\psi} \partial_\beta \hat{\psi} + g^{\alpha 4} \partial_4 \hat{\psi} \partial_\alpha \hat{\psi} + g^{\alpha 4} \partial_\alpha \hat{\psi} \partial_4 \hat{\psi} + g^{44} \partial_4 \hat{\psi} \partial_4 \hat{\psi}, \tag{54}$$

donde los términos de la métrica inversa vienen dados por la inversa de la métrica (40). Haciendo el cálculo se obtiene

$$\partial^A \hat{\psi} \partial_A \hat{\psi} = \sum_n \left(\partial^\alpha \hat{\psi} \partial_\alpha \hat{\psi} - \frac{in}{r} k A^\alpha \hat{\psi} \partial_\alpha \hat{\psi} - \frac{in}{r} k A_\alpha \hat{\psi} \partial^\alpha \hat{\psi} - \frac{k^2 A^2 n^2}{r^2} \hat{\psi}^2 - \frac{n^2}{\phi r^2} \hat{\psi}^2 \right). \tag{55}$$

Si nos fijamos en la acción (44) de la que partimos, vemos que, aunque tenemos el término gravitatorio en su forma canónica, no ocurre lo mismo con el factor electromagnético. Esto se puede solucionar haciendo la redefinición del campo eléctrico según $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu / \phi^{1/2}$, de esta forma el tensor $F_{\mu\nu}$ cambia como

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = \phi^{-1/2} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\phi} \left(A'_\nu \partial_\alpha \phi - A'_\alpha \partial_\beta \phi \right), \tag{56}$$

que, al contraerlo consigo mismo, nos da

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = \phi^{-1} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{57}$$

quedando la acción en su forma canónica.

Esta redefinición del campo eléctrico nos lleva a una acción para el campo de materia $\hat{\psi}$

$$S_{\hat{\psi}} = -\int dy \int d^4x \sum_n \sqrt{g} \left[\left(\partial^\alpha + \frac{ink}{r\sqrt{\phi}} A^\alpha \right) \hat{\psi} \left(\partial_\alpha + \frac{ink}{r\sqrt{\phi}} A_\alpha \right) \hat{\psi} - \frac{n^2}{\phi r^2} \hat{\psi}^2 \right], \tag{58}$$

donde se ha hecho un cambio $n \to -n$ para recuperar la expresión dada en [1].

Si comparamos la expresión recién obtenida con la regla de acoplo mínimo de la electrodinámica $\partial_\alpha \to \partial_\alpha + ieA_\alpha$ (siendo e la carga del electrón) se observa que en esta teoría el modo n-ésimo de Fourier para el campo escalar $\hat{\psi}$ posee una carga cuantizada

$$q_n = \frac{nk}{r\sqrt{\phi}} = \frac{n\sqrt{16\pi G}}{r\sqrt{\phi}}, \tag{59}$$

donde se usa $k = 4\sqrt{\pi G}$ como antes. Se ve así que el modo con $n = 0$ (que es el empleado en la deducción de la teoría de Kaluza-Klein) no posee carga eléctrica ninguna asociada a él. Además, podemos asociar la carga del electrón al siguiente modo ($n = 1$) para estimar la escala de longitudes ($r\sqrt{\phi}$) de la quinta coordenada, o viceversa, predecir el valor de la constante de estructura fina escogiendo bien nuestro $r\sqrt{\phi}$. Si se toma como escala de longitudes la longitud de Planck se obtiene

$$\alpha \equiv \frac{q_1^2}{4\pi} \approx 4, \tag{60}$$

que es un valor muy diferente al de la constante de estructura fina, pero que se podría aproximar más estimando mejor el valor de $r\sqrt{\phi}$.

Masa

Sin embargo, a pesar de lo que hemos visto sobre la predicción de cargas cuantizadas, esta teoría presenta un problema grande al predecir las masas de los modos asociados a dichas cargas. Según se ve en la expresión final para la acción de $\hat{\psi}$, la teoría da una masa para el modo n-ésimo de este campo con valor

$$m_n = \frac{|n|}{r\sqrt{\phi}}, \tag{61}$$

que es inversamente proporcional al radio de la quinta dimensión. Si este radio es pequeño (como se exige para poder imponer la condición cilíndrica y como se podría deducir de ver la predicción que la longitud de Planck da para la constante de estructura fina) tendremos una masa asociada enorme, del orden de la masa de Planck $m_P \cong \; 10^{19} GeV$, con lo que ya no podríamos asociar el modo $n = 1$ al electrón, ni a ninguna otra partícula conocida. Así, esta teoría no es válida a la hora de predecir la existencia de partículas cargadas, ya que éstas aparecen con una masa asociada enorme. Este hecho supuso el abandono de la teoría de Kaluza-Klein en $4+1$ dimensiones, pero en los últimos años se han creado teorías similares en $4+n$ dimensiones, donde las n dimensiones adicionales son compactas.

Referencias

[1] J.M. Overduin y P.S. Wesson, *Kaluza-Klein Gravity*, arXiv:gr-qc/9805018

[2] D. Bailin y A. Love, *Kaluza-Klein theories*. Rep. Prog. Phys. 50 (1987) 1087.