

Dinámica de la Cuerda Bosónica Circular

Fulgencio Villegas silva^{a*}, Rene Negrón Huamán^a,
Manuel Culqui Rodríguez^a

^aFacultad de ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Ciudad Universitaria. Av. Venezuela cdra 34. Ap. Postal 14-0149, Lima 14, Perú.

*fvillegass@unmsm.edu.pe

Abstract

We study the equations of movement of a closed circular bosonic string and we solve them by using the energy conservation law.

Keywords: string theory, bosonic string, superstring theory.

Resumen

Se estudian las ecuaciones dinámicas de una cuerda bosónica cerrada y se resuelve dichas ecuaciones haciendo uso de la ley de conservación de la energía.

Palabras claves: Teoría de cuerdas, cuerdas bosónicas, teoría de supercuerdas.

1. Introducción

En la última década del siglo pasado, uno de los mayores problemas de la física de altas energías consistía en encontrar una descripción consistente para el mundo a escala sub-atómica, en las últimas décadas, se puede decir, que las teorías que han tenido más preponderancia en la física teórica son la teoría cuántica de campos y la relatividad general. Sin embargo, estas teorías no se complementan cuando se las aplica al mismo ámbito de la física. En este contexto, la teoría que contiene las mejores características para la unificación de todas las fuerzas es la teoría de cuerdas y por ende la unión de la teoría gravitacional de Einstein y la Mecánica Cuántica.

La teoría de cuerdas es una teoría cuántica en la cual sus constituyentes fundamentales son objetos matemáticos extensos, unidimensionales, descritos en un espacio-tiempo multidimensional.

La teoría de cuerdas bosónicas considera a todos sus partículas como bosones reteniendo propiedades como la ausencia de fermiones. Los físicos han calculado que, para su consistencia, la teoría de cuerdas bosónicas requiere de 26 dimensiones espacio-temporales [1,2].

Y. Nambu y T. Goto [3,4] propusieron que la acción mas simple para una cuerda bosónica seria proporcional al área descrita por la cuerda cuando ella evoluciona en el espacio-tiempo, de donde se deduce que la acción de Nambu-Goto presenta la forma

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (1)$$

donde T_0 es la llamada tensión de la cuerda, $T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'}$, α' es la inclinación de Regge, siendo $\alpha' = \ell_c^2$, donde ℓ_c es la longitud de la cuerda.

La existencia de la raíz en la acción de Nambu-Goto (1) introduce dificultades en el cálculo, utilizando una métrica intrínseca auxiliar [5,6] de la hoja de mundo obtenemos una acción equivalente, llamada acción de Polyakov [7] dada por:

$$S_P = -\frac{T_0}{2c} \sqrt{g} g^{ab} \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu . \quad (2)$$

Las cuerdas bosónicas pueden ser abiertas o cerradas. Así como en la cuerda bosónica abierta los campos gauge ocurren naturalmente, en la cuerda bosónica cerrada el campo gravitacional ocurre naturalmente. Resulta, en efecto, que un campo gravitacional, un campo dilatónico y un campo tensorial antisimétrico ocurren en la cuerda cerrada en la misma forma que el campo gauge aparece en la cuerda abierta. El estado fundamental $|0\rangle$ de la cuerda cerrada es un taquión.

Los primeros estados excitados son estados másicos de la forma $X_+^\mu(\sigma) X_+^\nu(\sigma) |0\rangle$ y es la parte simétrica, la traza y la parte antisimétrica de un tensor formado por las X que son identificados con el campo gravitacional, con el dilatón y un tensor de campo antisimétrico respectivamente [8].

En este trabajo estudiamos la dinámica de la cuerda bosónica cerrada; este trabajo fue inspirado en el problema 6.4 del libro: *A first course in string theory*, Barton Zwiebach, Cambridge University Press, 2004.

2. Velocidad transversal

Existe una velocidad invariante que se puede definir en la cuerda, esta es sin embargo una velocidad transversal. Considerando el movimiento espacial de la cuerda, se puede considerar que cada punto en la cuerda se mueve transversalmente a ella. La velocidad transversal \vec{v} en cada punto de la cuerda es un vector ortogonal a la misma y tangente a la superficie espacial de la cuerda [9], esto es:

$$\vec{v} = \frac{\partial X}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} \right) \frac{\partial X}{\partial s} . \quad (3)$$

Para el caso más simple de cuerda bosónica cerrada, que corresponde a una del tipo circular, la magnitud de la velocidad transversal no es más que la razón de cambio en el tiempo de su radio

$$|\vec{v}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right| = \frac{dR}{dt} = \dot{R} . \quad (4)$$

Ahora concentraremos nuestra atención en escribir la acción (1) en términos de la velocidad transversal antes descrita.

Podemos escribir las coordenadas X^μ de la siguiente manera:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = \{ct, \vec{X}(t, \sigma)\}, \quad (5)$$

donde se ha considerado el gauge estático [10]: $X^0(\tau, \sigma) \equiv ct(\tau, \sigma) = c\tau$.

Usando la ecuación (5) y la definición (3), podemos calcular los productos punto relativistas que aparecen en la ecuación (1), de esta manera:

$$(\dot{X})^2 = -c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2, \quad (X')^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2, \quad \dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}, \quad (6)$$

reemplazando (6), en la acción de Nambu-Goto (1), obtenemos:

$$S = -2\pi T_0 \int dt R \sqrt{1 - \frac{\dot{R}^2}{c^2}}, \quad (7)$$

que es la acción de Nambu-Goto (1) escrita en términos de la velocidad transversal.

3. Ecuación dinámica

El Lagrangiano correspondiente a nuestro sistema en estudio es, según la ecuación (7):

$$L = -2\pi T_0 R \sqrt{1 - \frac{\dot{R}^2}{c^2}}, \quad (8)$$

este depende de R y \dot{R} , y además el sistema posee un solo grado de libertad. Haciendo uso de la ecuación de Euler-Lagrange, la ecuación de movimiento correspondiente a la cuerda bosónica circular cerrada será:

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} - \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + c^2 = 0. \quad (9)$$

La ecuación (9) se puede resolver por medio de ciertos artificios matemáticos, sin embargo el procedimiento es algo engorroso. Por otro lado si analizamos el Hamiltoniano del sistema, se podrá llegar a una solución de una manera mas simple y elegante.

4. Conservación del Hamiltoniano

Si se considera una cuerda estirada y estática, la energía total asociada con la misma no es más que el producto de la tensión de la misma por su longitud. Esto significa que si la tensión de una cuerda estática es T_0 , sin importar su longitud, entonces $T_0 a$ es la cantidad de energía que debemos utilizar para crear una cuerda de longitud a [11]. Si la cuerda no permanece estática, sino

que realiza movimiento, entonces debemos incluir un factor de corrección relativista. En particular para una cuerda circular de longitud $\sqrt{\epsilon}\pi R$, la energía total debe ser:

$$H = \frac{\sqrt{\epsilon}\pi R T}{\sqrt{1 - \frac{\dot{R}^2}{c^2}}}, \quad (10)$$

donde el denominador es el factor relativista que se debe agregar.

Se puede comprobar fácilmente la validez de la ecuación (10), pues es posible construir el Hamiltoniano del sistema a partir del Lagrangiano (8) según: $H = p \cdot v - L$.

La ecuación (10) muestra que el Hamiltoniano del sistema no depende explícitamente del tiempo, además $\frac{dH}{dt} = 0$, luego el Hamiltoniano del sistema se conserva en el tiempo, así:

$$H = \sqrt{\epsilon}\pi R_0 T. \quad (11)$$

El uso simultáneo de las ecuaciones (10) y (11), nos conduce a la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \left(\frac{c}{R_0}\right)^2 R^2 - c^2 = 0. \quad (12)$$

Al derivar la ecuación (12) obtenemos:

$$\frac{dR}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) + \left(\frac{c}{R_0} \right)^2 R \right] = 0. \quad (13)$$

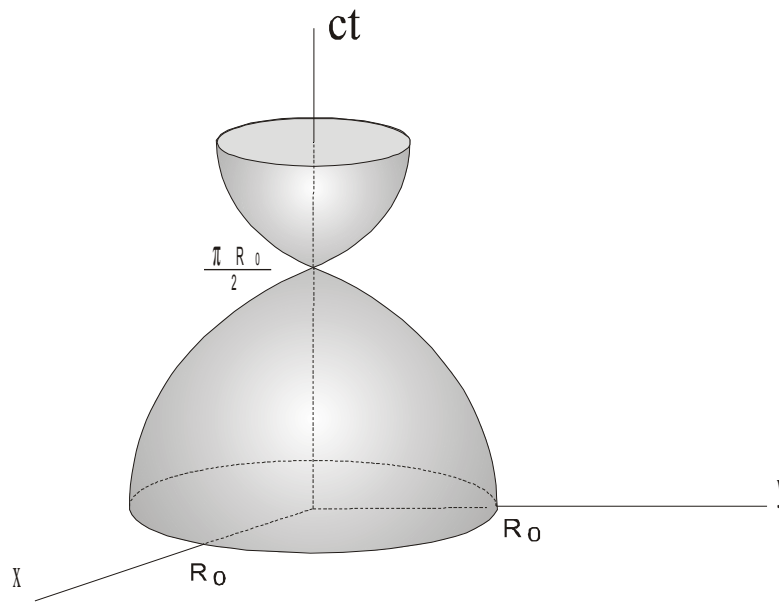
La expresión entre corchetes de la ecuación (13), es la ecuación correspondiente a un movimiento armónico simple, cuya solución se conoce y es la siguiente:

$$R(t) = R_0 \cos\left(\frac{c}{R_0} t\right). \quad (14)$$

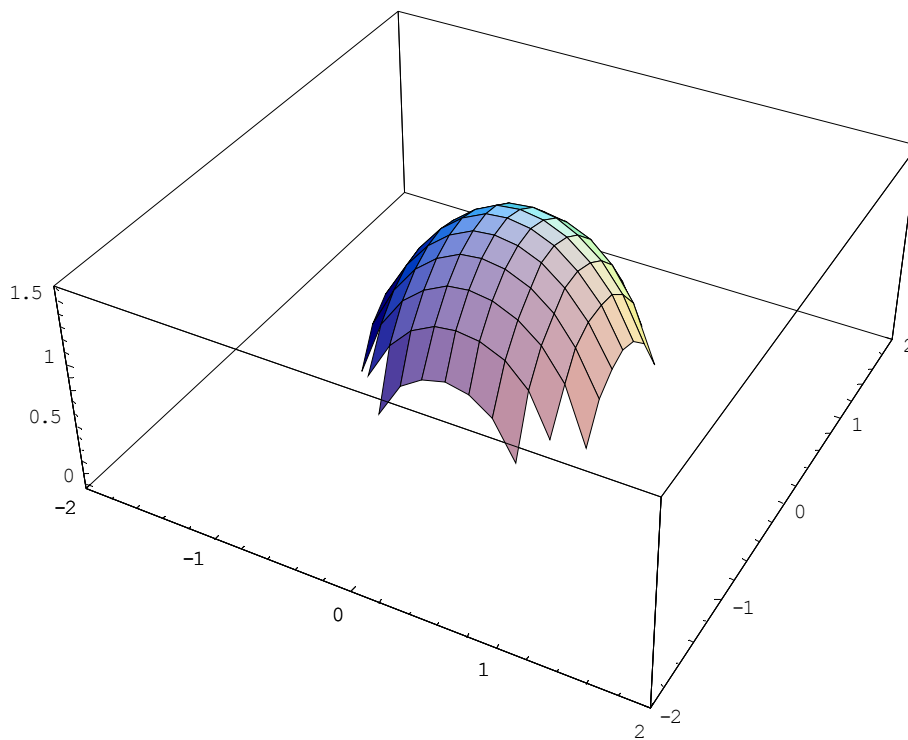
Adicionalmente, la velocidad transversal será:

$$|\vec{v}| = \frac{dR}{dt} = -c \sin\left(\frac{c}{R_0} t\right). \quad (15)$$

Por otro lado, se puede usar la ecuación (14) para hacer un esbozo de la hoja de mundo para una cuerda circular bosónica cerrada. Usando un sistema coordenado tridimensional (x, y, ct) la gráfica sería:



Usando el Programa Mathemática 5.1 graficamos la ecuación (14) considerando los siguientes valores: $R_0=1$, $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$ obteniendo la siguiente grafica:



5. Conclusiones

- Las soluciones de la ecuación dinámica de la cuerda bosónica cerrada son soluciones de tipo armónico con frecuencia propia de c/R . . Además la ecuación dinámica se resolvió usando el concepto de conservación del Hamiltoniano.
- Nótese que la ecuación (12) posee dos soluciones, una la ya hallada (ecuación 14), y la otra que corresponde al caso en que el radio de la cuerda no cambia en el tiempo. Es evidente que la solución que debemos tomar en cuenta debe satisfacer la ecuación dinámica (9), es por ello que dicha segunda solución no debe ser considerada, pues no satisface la ecuación dinámica.

6. Referencias

- [1] Michio Kaku, *Introduction to superstring and M-theory*, Springer 1999. Page 29.
- [2] M.Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press, 1978. Page 25.
- [3] Y. Nambu, *Lectures at the Copenhagen Symposium*, 1970.
- [4] T. Goto, *Prog. Theor. Phys.*, 46: 1560, 1971.
- [5] L.Brink, P. Di Vecchia, and P. Howe, *Phys. Lett.*, **B65**: 471, 1976 .
- [6] S.Deser and B. Zumino. *Phys. Lett.*, **B65**:369, 1976.
- [7] Alexander M. Polyakov, *Quantum Geometry of Bosonic String*. *Phys.Lett.*, **B103**: 207-210, 1981.
- [8] Lochlainn O’Raifeartaigh & Norbert Straumann, *Gauge Tjeory: Historial Origins and Some Modern Developments*. 100 Years of Gravity and Accelerated Frames, World Scientific, Advanced Series on Theoretical Physics Science Vol.9 (2005).
- [9] Barton Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, page 109, 110.
- [10] Barton Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, page 105, 106.
- [11] Barton Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, page 108.