

# PRÁCTICA 3. FLUJO EN UNA CAVIDAD CON ENTRADA Y SALIDA DE FLUJO

María del Pilar Dorado Rodríguez y Rafael Jesús Martínez Luna

1 de Julio de 2003

Consideremos una cavidad cuadrada de lado 1, en la cual entra un fluido por una de las paredes a una velocidad de módulo  $u_o = 1$  y sale por otra, como indica la figura, a la misma velocidad. Las dimensiones de las aberturas son las que aparecen en la figura.

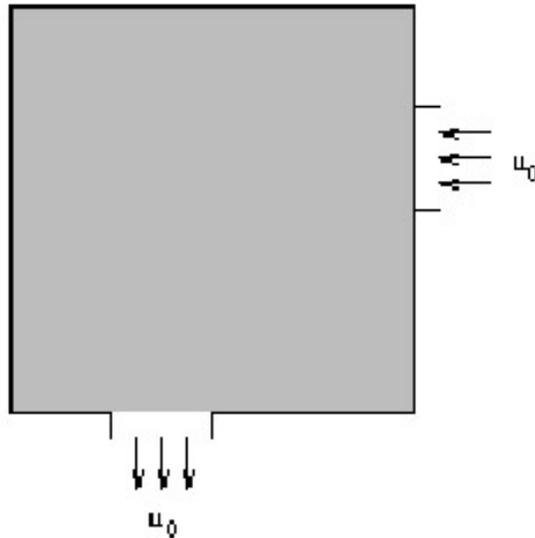


Figura 1: Cavidad con entrada y salida

1. Escribir las ecuaciones y las condiciones de contorno que modelan este problema.
2. Resolverlo empleando la formulación vorticidad-corriente, considerando diferentes números de Reynolds ( $Re = 1, 20, 40$ ).
3. Utilizar el método desarrollado en teoría de sobrerelajación con la paralelización Red-Black. Emplear 1,2,4 y 8 procesadores.

4. Analizar la ganancia en velocidad y la eficiencia en cada caso.
5. Dibujar tanto las líneas de corriente como el campo de velocidades que se obtienen en cada caso.

## 1. Introducción

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) constituyen lo que se denomina dinámica de fluidos. Puesto que los fenómenos considerados en la dinámica de fluidos son macroscópicos, un fluido se considera como un medio continuo. Esto significa que siempre se supone que cualquier elemento de volumen pequeño de fluido es suficientemente grande para contener un número muy elevado de moléculas. De acuerdo con ello, cuando hablamos de elementos de volumen infinitamente pequeños, estaremos haciendo referencia a aquellos que son muy pequeños en comparación con el volumen del cuerpo, pero grandes comparados con las distancias entre las moléculas.

La propiedad fundamental que caracteriza a los fluidos es que carecen de rigidez y en consecuencia se deforman fácilmente. Por este motivo un fluido no tiene forma y diferentes porciones del mismo se pueden acomodar dentro del recipiente que lo contiene. En esto difieren de los sólidos, que en virtud de su rigidez, tienen una forma definida, que sólo varía si se aplican fuerzas de considerable intensidad. Sin embargo, la distinción entre sólidos y fluidos no es nítida, pues muchos materiales que se comportan como sólidos bajo ciertas circunstancias, en otras circunstancias se comportan como fluidos.

Llamaremos sólido simple a un medio en el cual las posiciones relativas de sus elementos sufren cambios de pequeña magnitud cuando las fuerzas que actúan sobre él tienen cambios pequeños. Es decir: pequeñas fuerzas producen deformaciones pequeñas. Análogamente, llamaremos fluido simple a un medio en el cual las posiciones relativas de sus elementos sufren cambios no pequeños, aún cuando sean pequeños los cambios de las fuerzas que actúan sobre él. En otras palabras: fuerzas pequeñas dan lugar a deformaciones de gran magnitud. Podemos distinguir entre deformaciones con cambio de volumen pero sin cambio de forma (expansiones o contracciones puras), y deformaciones con cambio de forma pero sin cambio de volumen (distorsiones puras). En general, la deformación estará presente en ambas.

Llamaremos fluido a una porción de materia incapaz de contrarrestar el efecto de fuerzas que producen deformaciones sin cambio de volumen. Esto no quiere decir que el fluido no opone resistencia a tales deformaciones, pero sí significa que esta resistencia tiende a cero cuando tiende a cero la rapidez con la cual se produce la deformación, independientemente de la magnitud de la deformación. En consecuencia, dicha resistencia limita la rapidez con la cual ocurre la deformación, pero no su magnitud.

La distinción entre líquidos y gases, en lo referente a su comportamiento dinámico, es considerablemente idéntica, salvo ciertos factores. Típicamente, la densidad de una sustancia en la fase líquida suele ser mucho mayor (por varios órdenes de magnitud) que en la fase gaseosa, pero esto no afecta el tipo de movimiento, y sólo implica que se requieren fuerzas de diferente magnitud para producir la misma aceleración. La diferencia más significativa (en cuanto a sus efectos dinámicos) entre las propiedades mecánicas de líquidos y gases está en su compresibilidad. Los gases se comprimen más fácilmente que los líquidos: en consecuencia, cualquier movimiento que involucre variaciones apreciables de presión está acompañado

por cambios de volumen que son mucho mayores en un gas que en un líquido. En general, podemos decir que los líquidos son poco compresibles y que los gases son bastante compresibles.

Veamos ahora una clasificación de los fluidos, basándonos en la hipótesis básica de la Mecánica de Fluidos. Esta hipótesis consiste en suponer que en escala macroscópica, un fluido se comporta como si estuviera dotado de una estructura perfectamente continua, o, si se quiere, como si no tuviera estructura alguna. De acuerdo, con ello, magnitudes como la masa, la cantidad de movimiento y la energía, asociadas con la materia contenida en una pequeña parcela del fluido, se consideran uniformemente distribuidas en el volumen de parcela (en vez de estar concentradas en una pequeña fracción de éste, como realmente ocurre).

### 1.1. Clasificación de fluidos

Hemos definido un fluido como una sustancia que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo cortante. En ausencia de éste, no existe deformación. Los fluidos se pueden clasificar en forma general, según la relación que existe entre el esfuerzo cortante aplicado y la rapidez de deformación resultante. Aquellos fluidos donde el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la rapidez de deformación se denominan fluidos newtonianos. La mayor parte de los fluidos comunes como el agua, el aire, y la gasolina son prácticamente newtonianos bajo condiciones normales. El término no newtoniano se utiliza para clasificar todos los fluidos donde el esfuerzo cortante no es directamente proporcional a la rapidez de deformación.

Numerosos fluidos comunes tienen un comportamiento no newtoniano. Dos ejemplos muy claros son la crema dental y la pintura Lucite. Esta última es muy espesa cuando se encuentra en su recipiente, pero se adelgaza si se extiende con una brocha. De este modo, se toma una gran cantidad de pintura para no repetir la operación muchas veces. La crema dental se comporta como un fluido cuando se presiona el tubo contenedor. Sin embargo, no fluye por sí misma cuando se deja abierto el recipiente. Existe un esfuerzo límite, de cedencia, por debajo del cual la crema dental se comporta como un sólido. En rigor, nuestra definición de fluido es válida únicamente para aquellos materiales que tienen un valor cero para este esfuerzo de cedencia.

La viscosidad es una manifestación del movimiento molecular dentro del fluido. Las moléculas de regiones con alta velocidad global chocan con las moléculas que se mueven con una velocidad global menor, y viceversa. Estos choques permiten transportar cantidad de movimiento de una región de fluido a otra. Ya que los movimientos moleculares aleatorios se ven afectados por la temperatura del medio, la viscosidad resulta ser una función de la temperatura. La viscosidad ocasiona gradientes de la velocidad en las inmediaciones de las paredes y por lo tanto genera vórtices. Un ejemplo es un fluido contenido dentro de un cilindro, que inicialmente está en reposo y en un momento dado comienza a girar alrededor de su eje con una velocidad angular uniforme. El fluido en contacto con las paredes comienza a girar, y el movimiento de rotación se transmite paulatinamente al resto del fluido hasta que finalmente se alcanza un estado estacionario en el cual todo el fluido rota en bloque con la misma velocidad angular que el cilindro. Es el transporte de la vorticidad debido a la viscosidad lo que origina este proceso.

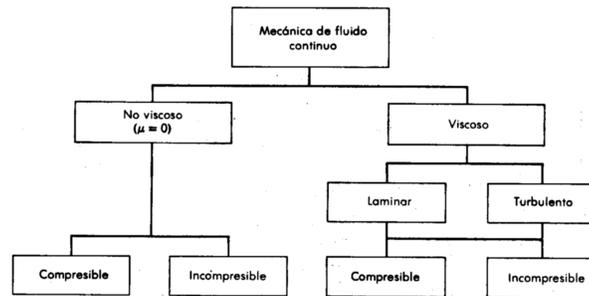


Figura 2: Clasificación general Mecánica de Fluidos

La subdivisión principal señalada en la figura anterior se tiene entre los flujos viscosos y no viscosos. En un flujo no viscoso se supone que la viscosidad de fluido vale cero. Evidentemente, tales flujos no existen; sin embargo; se tienen numerosos problemas donde esta hipótesis puede simplificar el análisis y al mismo tiempo ofrecer resultados significativos. (Si bien, los análisis simplificados siempre son deseables, los resultados deben ser razonablemente exactos para que tengan algún valor.) Dentro de la subdivisión de flujo viscoso podemos considerar problemas de dos clases principales. Flujos llamados incompresibles, en los cuales las variaciones de densidad son pequeñas y relativamente poco importantes. Flujos conocidos como compresibles donde las variaciones de densidad juegan un papel dominante como es el caso de los gases a velocidades muy altas. Por otra parte, todos los fluidos poseen viscosidad, por lo que los flujos viscosos resultan de la mayor importancia en el estudio de mecánica de fluidos.

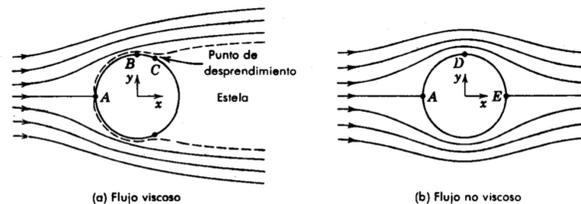


Figura 3: Dibujo cualitativo de flujo sobre un cilindro

Podemos observar que las líneas de corriente son simétricas respecto al eje  $x$ . El fluido a lo largo de la línea de corriente central se divide y fluye alrededor del cilindro una vez que ha incidido en el punto A. Este punto sobre el cilindro recibe el nombre de punto de estancamiento. Al igual que en el flujo sobre una placa plana, se desarrolla una capa límite en las cercanías de la pared sólida del cilindro. La distribución de velocidades fuera de la capa límite se puede determinar teniendo en cuenta el espaciamiento entre líneas de corriente. Puesto que no puede haber flujo a través de una línea de corriente, es de esperarse que la velocidad del fluido se incremente en aquellas regiones donde el espaciamiento entre líneas de corrientes disminuya. Por el contrario, un incremento en el espaciamiento entre líneas de corriente implica una disminución en la velocidad del fluido.

Considérese momentáneamente el flujo incompresible alrededor del cilindro, suponiendo que se trate de un flujo no viscoso, como el mostrado en la figura 3, este flujo resulta simétrico respecto tanto al eje  $x$  como al eje  $y$ . La velocidad alrededor del cilindro crece hasta un valor máximo en el punto D y después disminuye conforme nos movemos alrededor del cilindro. Para un flujo no viscoso, un incremento en la velocidad siempre va acompañado de una disminución en la presión, y viceversa. De esta manera, en el caso que nos ocupa, la presión sobre la superficie del cilindro disminuye conforme nos movemos del punto A al punto D y después se incrementa al pasar del punto D hasta el E. Puesto que el flujo es simétrico respecto a los dos ejes coordenados, es de esperarse que la distribución de presiones resulte también simétrica respecto a estos ejes. Este es, en efecto, el caso.

No existiendo esfuerzos cortantes en un flujo no viscoso, para determinar la fuerza neta que actúa sobre un cilindro solamente se necesita considerar las fuerzas de presión. La simetría en la distribución de presiones conduce a la conclusión de que en un flujo no viscoso no existe una fuerza neta que actúe sobre un cilindro, ya sea en la dirección  $x$  o en la dirección  $y$ . La fuerza neta en la dirección  $x$  recibe el nombre de arrastre. Según lo anterior, se concluye que el arrastre para un cilindro en un flujo no viscoso es cero; esta conclusión evidentemente contradice nuestra experiencia, ya que sabemos que todos los cuerpos sumergidos en un flujo real experimentan algún arrastre. Al examinar el flujo no viscoso alrededor de un cuerpo hemos despreciado la presencia de la capa límite, en virtud de la definición de un flujo no viscoso.

Ahora vamos a examinar el caso real correspondiente. Para estudiar el caso real de la figura 3, supondremos que la capa límite es delgada. Si tal es el caso, es razonable suponer además que el campo de presiones es cualitativamente el mismo que en el correspondiente flujo no viscoso. Puesto que la presión disminuye continuamente entre los puntos A y B un elemento de fluido dentro de la capa límite experimenta una fuerza de presión neta en la dirección del flujo. En la región entre A y B, esta fuerza de presión neta es suficiente para superar la fuerza cortante resistente, manteniéndose el movimiento del elemento en la dirección del flujo.

Considérese ahora un elemento de fluido dentro de la capa límite en la parte posterior del cilindro detrás del punto B. Puesto que la presión crece en la dirección del flujo, dicho elemento de fluido experimenta una fuerza de presión neta opuesta a la dirección del movimiento. En algún punto sobre el cilindro, la cantidad de movimiento del fluido dentro de la capa límite resulta insuficiente para empujar al elemento más allá dentro de la región donde crece la presión. Las capas de fluido adyacentes a la superficie del sólido alcanzarán el reposo, y el flujo se separará de la superficie; el punto preciso donde esto ocurre se llama punto de separación o desprendimiento. La separación de la capa límite da como resultado la formación de una región de presión relativamente baja detrás del cuerpo; esta región resulta deficiente también en cantidad de movimiento y se le conoce como estela. Se tiene, pues, que para el flujo separado alrededor de un cuerpo, existe un desbalance neto de las fuerzas de presión, en la dirección del flujo dando como resultado un arrastre debido a la presión sobre el cuerpo. Cuanto mayor sea el tamaño de la estela detrás del cuerpo, tanto mayor resultará el arrastre debido a la presión.

Es lógico preguntarnos cómo se podría reducir el tamaño de la estela y por lo tanto el arrastre debido a la presión. Como una estela grande surge de la separación de la capa límite, y este efecto a su vez se debe a la presencia de un gradiente de presión adverso (es decir, un incremento de presión en la dirección

del flujo), la reducción de este gradiente adverso debe retrasar el fenómeno de la separación y, por tanto, reducir el arrastre.

El fuselado de un cuerpo reduce la magnitud del gradiente de presión adverso al distribuirlo sobre una mayor distancia. Por ejemplo, si se añadiese una sección gradualmente afilada (cuña) en la parte posterior del cilindro de

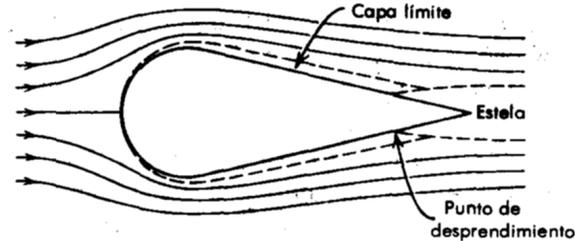


Figura 4: Flujo sobre un objeto fusiforme

la figura 3, el flujo cualitativamente sería como se muestra en la figura 4. El fuselaje en la forma del cuerpo efectivamente retrasa el punto de separación, si bien la superficie del cuerpo expuesta al flujo y, por lo tanto, la fuerza cortante total que actúa sobre el cuerpo, se ven incrementadas, el arrastre total se ve reducido de manera significativa.

Los flujos viscosos se pueden clasificar en laminares o turbulentos teniendo en cuenta la estructura interna del flujo. En un régimen laminar, la estructura del flujo se caracteriza por el movimiento de láminas o capas. La estructura del flujo en un régimen turbulento por otro lado, se caracteriza por los movimientos tridimensionales, aleatorios, de las partículas de fluido, superpuestos al movimiento promedio.

En un flujo laminar no existe un estado macroscópico de las capas de fluido adyacentes entre sí. Un filamento delgado de tinta que se inyecte en un flujo laminar aparece como una sola línea; no se presenta dispersión de la tinta a través del flujo, excepto una difusión muy lenta debido al movimiento molecular. Por otra parte, un filamento de tinta inyectado en un flujo turbulento rápidamente se dispersa en todo el campo de flujo; la línea del colorante se descompone en una enredada maraña de hilos de tinta. Este comportamiento del flujo turbulento se debe a las pequeñas fluctuaciones de velocidad superpuestas al flujo medio de un flujo turbulento; el mezclado macroscópico de partículas pertenecientes a capas adyacentes de fluido da como resultado una rápida dispersión del colorante. El filamento rectilíneo de humo que sale de un cigarrillo expuesto a un ambiente tranquilo, ofrece una imagen clara del flujo laminar. Conforme el humo continúa subiendo, se transforma en un movimiento aleatorio, irregular; es un ejemplo de flujo turbulento.

El que un flujo sea laminar o turbulento depende de las propiedades del caso. Así, por ejemplo, la naturaleza del flujo (laminar o turbulento) a través de un tubo se puede establecer teniendo en cuenta el valor de un parámetro adimensional, el número de Reynolds,  $Re = \frac{\rho V D}{\nu}$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $V$  la velocidad promedio,  $D$  el diámetro del tubo y  $\nu$  la viscosidad.

## 1.2. Flujos viscosos

Trataremos ahora flujos en los cuales los efectos de la viscosidad son importantes, pero limitándonos al caso incompresible y con densidad uniforme. La expresión del tensor de esfuerzos  $\sigma$  se debe introducir en la ecuación general de movimiento, pero como  $\eta$  y  $\xi$  dependen de la temperatura y de la presión (que en general no son uniformes en el fluido) no los podemos sacar fuera del operador divergencia. En muchos casos, sin embargo, los coeficientes de viscosidad no varían apreciablemente en el flujo y los podemos considerar constantes. Por lo tanto, la ecuación de movimiento del fluido es:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g - \nabla p + \xi \nabla(\nabla \cdot u) + \eta \nabla^2 u$$

que describe flujos viscosos incompresibles de fluidos Newtonianos. Recordando que nos limitamos al caso incompresible y de densidad uniforme:  $\nabla \cdot u = 0$  y  $\rho = \text{cte.}$ . La ecuación de movimiento es entonces la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{du}{dt} = F - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 u$$

donde  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  indica la viscosidad cinemática. Vamos a suponer que la fuerza de volumen es conservativa, de modo que  $F = -\nabla\psi$  siendo  $\psi$  el potencial correspondiente. Esta última expresión muestra que las fuerzas de inercia y de viscosidad equilibran la suma de la fuerza debida al gradiente de la presión más la fuerza de volumen  $\rho F$ . Podemos definir una presión modificada como:

$$P = p + \rho\psi$$

y entonces la ecuación de Navier-Stokes queda de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 u$$

como si no existieran fuerzas de volumen. Esto equivale a agregar a la presión una presión ficticia  $\rho\psi$ . Dado que hemos supuesto que  $\rho$  es constante, esta presión ficticia es un dato del problema, por lo tanto es suficiente resolver esta ecuación (lo que formalmente es equivalente a suponer que  $F = 0$ ), con tal de interpretar  $P$  de acuerdo a:  $P = p + \rho\psi$ .

Hemos de recordar que para la obtención de la ecuación del movimiento de un fluido viscoso hemos tenido en cuenta el efecto producido por la disipación de energía, que se produce durante el movimiento de un fluido, sobre el propio movimiento. Este proceso es el resultado de la irreversibilidad termodinámica del movimiento. Siempre se presenta dicha irreversibilidad en alguna cuantía y se debe a la fricción interna (viscosidad) y a la conducción térmica.

En la ecuación de Navier-Stokes, observamos que la viscosidad de un fluido incompresible queda determinada sólo por un coeficiente. Puesto que la mayor parte de los fluidos pueden considerarse como prácticamente incompresibles, este es coeficiente de viscosidad  $\eta$  (viscosidad dinámica) es el que tiene, en general, importancia. Conviene mencionar que la viscosidad dinámica de un gas a temperatura determinada es independiente de la presión. Sin embargo, la viscosidad cinética es inversamente proporcional a la presión.

### 1.3. Número de Reynolds

Consideremos un fluido viscoso en movimiento, y sea  $U$  el valor típico de la velocidad. Además, sea  $L$  la escala espacial característica del flujo. Una vez elegidos  $L$  y  $U$ , podemos formar la cantidad:

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

que es un número puro que se conoce como número de Reynolds. El motivo de la importancia del número de Reynolds se puede apreciar si se observa que las derivadas de las componentes de  $u$  son típicamente del orden de magnitud de  $\frac{U}{L}$  (suponiendo, se entiende, que las componentes de  $u$  tengan variaciones del orden de  $U$  sobre distancias del orden de  $L$ ). Típicamente, las derivadas de las componentes de  $u$  tendrán ellas mismas variaciones del orden de  $\frac{U}{L}$  sobre distancias del orden de  $L$ , luego las derivadas segundas serán del orden de magnitud de  $\frac{U}{L^2}$ . De esta forma podemos estimar el orden de magnitud de los términos de inercia y viscoso de la ecuación de Navier-Stokes como:

- término de inercia  $|(u \cdot \nabla)u| = O(\frac{U^2}{L})$
- término viscoso  $|\nu \nabla^2 u| = O(\nu \frac{U}{L^2})$

Por consiguiente, el número de Reynolds es importante porque permite estimar groseramente la importancia relativa de dos términos importantes de la ecuación de Navier-Stokes. No debe sorprender, entonces, que flujos caracterizados por un número de Reynolds grande y flujos caracterizados por un número de Reynolds pequeño tengan características muy diferentes. Para el caso  $Re \gg 1$  corresponde a lo que podríamos llamar flujos de baja viscosidad. El resultado anterior sugiere que cuando  $Re \gg 1$  los efectos de la viscosidad deberían ser, en general, despreciables. Más adelante tomaremos de nuevo el concepto de número de Reynolds.

## 2. Ecuaciones y condiciones de contorno que modelan el problema

Antes de abordar el problema y trabajar con las ecuaciones de Navier-Stokes y con las condiciones de contorno dadas para nuestro problema en particular, hemos de considerar una serie de propiedades características del tipo de fluido en concreto que utilizaremos:

- Viscoso: Existe rozamiento interno entre las partículas.
- Newtoniano: La viscosidad dinámica es constante e independiente de las coordenadas espaciales (gases y líquidos ligeros).
- Homogéneo: Densidad de masa  $\rho$  constante en cada instante.
- Incompresible: Volumen ocupado por un conjunto de partículas no varía con el tiempo.
- Isotermo: Se desprecian los efectos termodinámicos (procesos adiabáticos, entropía constante).

Se trata de un fluido real que tiene velocidad tangencial y normal cero sobre las paredes, esto significa que verifica la condición de no deslizamiento. Nuestro problema está centrado en el caso bidimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes. Veamos a grandes rasgos cómo abordar nuestro problema desde el punto de vista del análisis numérico. Inicialmente trabajamos con dos magnitudes que son el vector velocidad  $u(u,v)$ , y la presión  $p(x,t)$ .

$$u = (u(x, t), v(x, t))$$

$$p(x, t)$$

La presión y la velocidad serían las dos magnitudes que tenemos que conocer para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes o del fluido. Debemos tener en cuenta una serie de propiedades del fluido con el que trabajamos (anteriormente expuestas). La ecuación de Navier-Stokes aparece a causa de la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la masa para un fluido con características: viscoso, incompresible, isoterma, newtoniano, ...

La ecuación de Navier-Stokes sería:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(u \text{ grad})u = -\frac{1}{\rho}\text{grad}(P) + u\Delta u$$

Como vemos se trata de una ecuación no lineal debido al término convectivo  $(u \text{ grad})u$ . Este término es el que debemos minimizar a toda costa, ya que es el término problemático a la hora de resolver la ecuación. Por otro lado el laplaciano es el término que ayuda a que la resolución de la ecuación sea más fácil. Luego nuestro problema resulta más aceptable cuanto mayor peso tenga el término del laplaciano en nuestra ecuación.

A partir de esta ecuación se introduce el número de Reynolds (Re) para adimensionalizar la ecuación de Navier-Stokes. Este parámetro está relacionado con la viscosidad, la velocidad, y la longitud del dominio donde se encuentre nuestro fluido. Normalmente tanto la velocidad como la longitud están parametrizadas, con lo que la dependencia de Re es directa con la viscosidad, en particular están relacionadas inversamente la una con la otra. Luego para Re grande, la viscosidad del fluido será pequeña y viceversa.

- Para un número de Reynolds elevado estaremos trabajando con un fluido turbulento (aparecerán vórtices).
- Para un número de Reynolds pequeño estaremos trabajando con un fluido laminar.

De la ecuación de continuidad, (conservación de la masa) obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

donde  $(-v,u)$  es un campo de velocidades conservativo, luego admite una función potencial a la que llamaremos función de corriente  $\psi(x, y)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v ; \frac{\partial \psi}{\partial y} = u ; \nabla \psi = (-v, u)$$

La función de corriente nos daría las líneas de campo de las velocidades. Ahora introducimos una nueva magnitud a la que llamamos vorticidad  $\omega(x, y)$ .

$$\xi = \text{rot } v = k \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

$$\omega(x, y) = -\xi_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Hemos definido la función de corriente y la vorticidad con el objetivo de eliminar el término debido a la presión, con lo cual pasamos a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas no lineal:

$$\nabla^2 \psi = 0$$

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 \omega = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

Luego como vemos hemos pasado de las magnitudes de velocidad y presión (u,p) a otras, función de corriente y vorticidad ( $\psi, \omega$ ). El problema consiste resolver un sistema de 2 ecuaciones, con derivadas parciales (luego deberemos imponer unas condiciones de contorno), para ello debemos aplicar el método de las diferencias finitas, con lo cual debemos mallar nuestro dominio (tendremos en cuenta el paso que tomemos en el mallado para conseguir que el orificio se encuentre dentro de los puntos de nuestro mallado). Aplicando el método obtenemos:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{(i,j)} \simeq \frac{\psi(i+1, j) - \psi(i-1, j)}{2h}$$

$$(\Delta \psi)_{(i,j)} \simeq \frac{-4\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{h^2}$$

Ahora vamos a imponer las condiciones de contorno para nuestro dominio, el cual tiene un orificio de entrada y uno de salida. A partir de las condiciones de contorno en (u,v) conoceremos las correspondientes a la función de corriente.

- En A,B,C,D,F,G tenemos que  $u = v = 0$ .
- En E tenemos que  $u = -1$  y  $v = 0$ .
- En H tenemos que  $u = 0$  y  $v = -1$ .

Veamos las condiciones de contorno para la función de corriente  $\psi(x, y)$ :

- A,B,C,D.

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi(x, y) = g(x, y) + C$ , usando  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 = g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$  entonces  $\psi(x, y) = C = 0$ , el hecho de que se cumpla también para las paredes B,C,D es debido a la continuidad entre las mismas.

- E.

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi(x, y) = g(y) + C = -y + C$   $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -1 = g'(y) \Rightarrow g(y) = -y$   $\psi(1, \frac{3}{4}) = 0 = -\frac{3}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}$

Entonces obtenemos que en E  $\psi(x, y) = \frac{3}{4} - y$ .

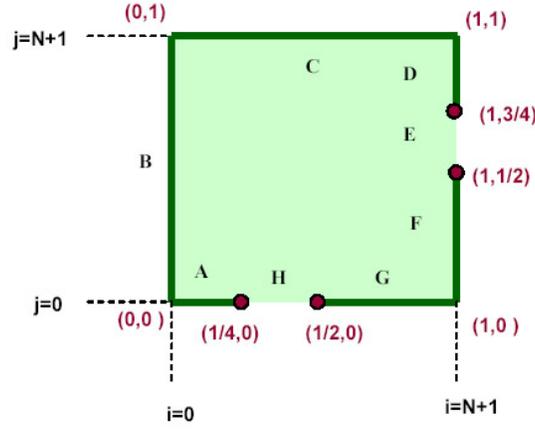


Figura 5: Dimensiones de la cavidad

- F,G.

$$\psi(1, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- H.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 1 \Rightarrow \psi(x, y) = x + g(y) + C \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = g'(y) = 0, \quad g(y) = C \quad \psi(\frac{1}{4}, 0) = 0 = \frac{1}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

Entonces obtenemos que en H  $\psi(x, y) = x + C = x - \frac{1}{4}$ .

Ahora veamos las condiciones de contorno para  $\omega$ , físicamente no tendrá condiciones, pero desde el punto de vista numérico necesitamos conocer estas condiciones. Vemos las relaciones entre  $\omega$  y las derivadas de  $\psi$ .

$$\omega = \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

Sobre B,  $(0, j) \Rightarrow \omega(0, j) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, j) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(1, j)$ . Pero sabemos que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, j) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y) = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(0, j) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, y) = 0$$

esto último nos asegura que  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(0, y) = 0$ .

Utilizando un desarrollo de Taylor:

$$\psi(1, j) = \psi(0, j) + h \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, j) + O(h^3)$$

siendo  $x_1 = x_0 + h$ , finalmente obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, j) \simeq \frac{2}{h^2}[\psi(1, j) - \psi(0, j)] = \frac{2}{h^2}[\psi_{interior} - \psi_{frontera}] = \omega_{frontera}$$

Luego estas serían las condiciones que tenemos que imponer a nuestras magnitudes de trabajo. Hemos de recordar que una vez conocido el valor de la función de corriente  $\psi(x, y)$  en todos los puntos de nuestro dominio, es fácil conocer las componentes de la velocidad sabiendo que:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2h}(\psi_{i-1, j} - \psi_{i+1, j}) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2h}(\psi_{i, j+1} - \psi_{i, j-1})$$

### 3. Código

Para abordar la resolución numérica de nuestro problema, comenzamos con un análisis secuencial del mismo. Esto nos hará trabajar con distintos de los algoritmos conocidos (Jacobi, Gauss Seidel...), a fin de encontrar un código que optimice la resolución que perseguimos. Al tiempo, habrá que prever la futura paralelización del mismo, lo que introduce una nueva perspectiva en cuanto al código secuencial más conveniente.

Por todos esto, parece lógico pensar, que en el desarrollo de nuestro estudio, irán apareciendo distintos codigos, que iremos modificando y transformando hasta llegar a nuestro código paralelo final.

Pues bien, puesto que la base de todos estos códigos será muy parecida, y a fin de no listar interminables secuencias de mandatos, vamos a exponer únicamente este código final al que llegamos. De esta manera, a lo largo de nuestro estudio haremos referencia a este código, sobre el que señalaremos las modificaciones pertinentes para el caso concreto que estemos analizando en ese momento.

## 4. Resolución empleando la formulación vorticidad-corriente

En el apartado 2 hemos visto cómo partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes y aplicando el método de las diferencias finitas (discretización del dominio y reemplazar las derivadas por diferencias finitas), pasaríamos a trabajar con la función de corriente  $\psi$  y  $\omega$ , es de cir, empleamos la formulación de vorticidad-corriente para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. Al discretizar el dominio de trabajo hemos de definir el valor del paso en ambas dimensiones de nuestra cavidad, los cuales estarán relacionados con el número de nodos interiores de nuestro mallado, al que llamaremos  $N$ . Por comodidad tomaremos ambos pasos ( $h$  y  $k$ ), de igual valor  $\frac{1}{N+1}$ . Una vez expuestas estas consideraciones veamos como podríamos resolver el problema mediante el análisis numérico. En este primer intento de resolución numérica únicamente utilizaremos algoritmos secuenciales, esto es que la resolución numérica se llevaría a cabo por un sólo procesador. Nuestro objetivo es calcular el valor de la función de corriente y la vorticidad en cada punto de nuestro mallado. Veamos los pasos que serían conveniente tomar:

- Tomo valores iniciales para  $\omega$  y  $\psi$ .
- Impongo condiciones de contorno para  $\psi$ .
- Hago una iteración de Gauss-Seidel para calcular  $\psi^1$ .
- Calculo condiciones de contorno para  $\omega$ .
- Hago una iteración de G-S para calcular  $\omega^1$ .

$$\| \psi^1 - \psi^0 \| < \epsilon \text{ y } \| \omega^1 - \omega^0 \| < \epsilon$$

si se cumple entonces:  $\psi = \psi^1$   $\omega = \omega^1$

si no se cumple:  $\psi^0 \leftarrow \psi^1$  y  $\omega^0 \leftarrow \omega^1$ , y volvemos al tercer punto de nuevo.

Básicamente este sería el proceso a seguir para resolver el problema. Antes de comentar estos pasos debemos hablar de los métodos numéricos que hemos utilizado. Nuestro sistema de trabajo consistió en estudiar como eran las soluciones que obteníamos según el método que utilizáramos. Siempre usamos métodos iterativos, con lo que la solución final que obtenemos de nuestras magnitudes convergen a un valor que debe cumplir la tolerancia impuesta inicialmente, además sabemos que para matrices grandes y huecas es conveniente utilizar un método iterativo pues así no se acumulan errores de redondeo. Los métodos utilizamos fueron: Jacobi, Gauss-Seidel, Sobrerrelajación y Red-Balck.

- Método de Jacobi. Partiendo de una solución inicial  $U^0$ , las iteraciones del método de Jacobi se escriben, como

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j}^k + U_{i-1,j}^k + U_{i,j-1}^k + U_{i,j+1}^k)$$

Vemos, como para aplicar Jacobi no hace falta construir la matriz del sistema. Se realizaran iteraciones hasta que se consiga una tolerancia fijada. La convergencia se vuelve más lenta cuanto más grande es  $N$ , necesiándose un número de pasos proporcional a  $N^2$  para reducir el error a la mitad. Aunque se trate de un método lento, el hecho de que la actualización de cada nodo en

cada iteración sólo depende de los valores en los nodos en la iteración anterior, permite que puedan actualizar simultáneamente estos valores si se dispone de varios procesadores. Esto significa que el método de Jacobi es paralelizable, ya que para calcular el valor en un punto (media de los valores adyacentes) los cálculos dependerán exclusivamente del valor que tuvieramos en la iteración anterior, luego las operaciones serían independientes (cada valor de  $U_{i,j}$  puede ser actualizado independientemente) y por tanto el algoritmo sería paralelizable.

- Método de Gauss-Seidel. El método de Gauss-Seidel es una modificación del método de Jacobi en el que se utiliza parte de los nuevos valores actualizados, es decir, se aprovecha la información que se acaba de obtener en la iteración anterior. En concreto la expresión que se utiliza sería:

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j}^k + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^k)$$

Este método, al contrario que el de Jacobi, no se puede paralelizar ya que hasta que no se ha actualizado un valor no se puede actualizar un valor no se puede actualizar el siguiente. Aun así este método llega a la convergencia con mayor rapidez.

- Método de sobrerelajación. Es un método que acelera la convergencia de los método iterativos. Para el caso particular del método anterior se modifica la ecuación introduciendo un parámetro de relajación al que llamaremos  $\alpha$ . Cuando  $\alpha = 1$  tendremos el método de Gauss-Seidel. Lo importante de este método es encontrar el parámetro de relajación óptimo para acelerar la convergencia. Cuando  $\alpha$  es menor que 1, se llama método de subrelajación y puede utilizarse para obtener la convergencia para el caso que el problema no converga por el método de Gauss-Seidel. Cuando  $\alpha$  es mayor que la unidad se llama método de sobrerelajación y se utilizan para acelerar la convergencia de sistemas que son convergentes por Gauss-Seidel. Este es el método SOR, sucesivas sobrerelajaciones. Este método no es paralelizable puesto que sólo actúa como mejora de la rapidez de convergencia para los método iterativos.
- Método Red-Black. Observando el método de Gauss-Seidel, nos damos cuenta que los nodos cuyos índices suman par, dependen sólo de los nodos cuyos suman impar y viceversa. La idea consiste en actualizar todos los nodos cuyos índices suman par y después los restantes nodos, utilizando en este último caso los valores actualizados de los nodos pares. El método Red-Black, es dos veces más rápido que el de Jacobi cuando se utiliza de forma secuencial, sin embargo cuando se aplica en paralelo este proceso, por sí mismo, no acelera la convergencia ya que cada procesador ha de realizar el doble de cálculos en cada iteración. Por tanto, este método haría que Gauss-Seidel fuera paralelizable.

Una vez hablado de los diferentes métodos que utilizamos, analizaremos como es nuestro algoritmo de resolución. Inicialmente imponemos las condiciones iniciales para nuestras matrices  $\psi$  y  $\omega$ . De igual manera hemos de imponer las condiciones de contorno, en este caso únicamente tiene sentido para la función de corriente, ya que para la vorticidad no tienen sentido físico y además no son conocidas inicialmente. Para conocer las condiciones de contorno para la vorticidad, ya que son necesarias desde el punto de vista

numérico hemos, de conocer previamente el valor de  $\psi$  en el interior, para ello hacemos una iteración con Jacobi o Gauss-Seidel, para tener una aproximación inicial. El hecho de que únicamente hagamos una sola iteración radica en que al tener un bucle anidado dentro de otro no es conveniente realizar más de una iteración para encontrar una aproximación, ya que en última instancia lo que obtendremos será una aproximación. Con esta primera aproximación calcularíamos las condiciones de contorno para  $\omega$ , de modo que pudieramos calcular una primera aproximación de  $\omega$  con una iteración de Gauss-Seidel. De este modo calcularíamos la solución convergente para  $\psi$  y  $\omega$  cuando veriquen la tolerancia impuesta.

Inicialmente usamos el método de Jacobi para realizar estas aproximaciones de una sola iteración en  $\psi$  y  $\omega$ . Es importante tener en cuenta que los resultados pueden ser muy distintos dependiendo si usamos secciones matriciales o bucles para Jacobi. Veamos cual es el problema que se nos plantea. Para la primera iteración de  $\psi$  es independiente el uso de secciones matriciales o de bucles, el resultado no se ve afectado. No obstante el problema se presenta al hacer una iteración de  $\omega$ . Dependiendo del uso de secciones matriciales o bucles en el cálculo de  $\omega$  con Jacobi podemos distinguir dos casos:

- Secciones matriciales. Cuando usemos secciones matriciales el programa tendrá un fallo de ejecución. Esto es debido a que las condiciones de contorno en  $\omega$  no son unas condiciones de contorno lo suficientemente buenas, ya que han sido calculadas previamente por una sola iteración de Jacobi para  $\psi$ . Luego al no ser suficientemente buenas la solución no convergerá produciéndose un fallo de ejecución.
- Bucles. Para este caso la ejecución del programa no presenta ningún problema, tendremos una solución que convergerá sin problema. No obstante no estamos usando el método de Jacobi, puesto que según la notación que nosotros usamos, no estaremos usando las condiciones de contorno que hemos calculado previamente con el valor aproximado de  $\psi$ , sino que estaríamos usando las condiciones de contorno que fueron impuestas en el comienzo del código, es decir, las condiciones iniciales  $\omega = 0$ . Al imponer  $\omega_{old} = \omega$ , usaríamos estas condiciones iniciales. Al usar estas condiciones el programa no se bloquea debido a que al programa le da tiempo a obtener unas condiciones mejoradas porque parten de una segunda iteración de  $\psi$ , y por tanto dando tiempo al programa a encaminar hacia un valor de  $\omega$  mejor y que converge. Aún así no estaríamos resolviendo el problema correctamente.

Para resolver el problema que aparece cuando usamos secciones matriciales (que es cuando realmente usamos Jacobi), hemos de hacer dos iteraciones para aproximar el valor de  $\psi$  de modo que las primeras condiciones de contorno que obtengamos para  $\omega$  sean lo suficientemente buenas y obtengamos una solución convergente usando realmente el método de Jacobi.

Este fue nuestro punto de partida, el siguiente paso consistía en modificar el algoritmo cambiando el método de Jacobi por el método de Gauss-Seidel (ahora necesariamente trabajamos con bucles), que como ya vimos es más rápido en la convergencia. Después aplicamos el método de sobrerelajación y por último modificarlo con Red-Black. Como ya mencionamos en el apartado anterior, no mostraremos cada uno de los códigos que hemos usado para cada tipo de método numérico, puesto que nuestro interés se centra en resolver un sistema de ecuaciones mediante el algoritmo más óptimo posible, por tanto presentamos el último código que representa el final de una evolución de códigos donde el inicial era el método de Jacobi

antes mencionado. El código es el que se presentó en el apartado anterior. Aunque en realidad ese código está adaptado para trabajar en paralelo, no tendremos ningún problema puesto que las intrucciones y directivas de HPF se consideran como líneas de comentario en nuestro compilador, trabajando por tanto secuencialmente. Sólo se tendrán en cuenta estas líneas cuando utilicemos un compilador que trabaje en paralelo.

Ahora tenemos que buscar cual es el valor óptimo del parámetro de relajación, es decir, aquel valor de  $\alpha$  que haga que se encuentre una solución para un número de iteraciones menor. Con este valor optimizamos el tiempo de ejecución, osea la velocidad de convergencia del método. Al ser un método iterativo, la solución siempre convergerá al mismo valor (para iguales condiciones, número de Reynolds y número de nodos), por ello buscamos la que sea más rápida. Tenemos que buscar el *alpha* óptimo para diferentes casos del número de Reynolds,  $Re = 1, 20, 40$ . Además también veremos como es la variación de este parámetro en función del número de nodos interiores  $N$ . Veremos cual es el comportamiento al variar el parámetro  $N$ . Es muy importante tomar el número de nodos siendo  $N + 1$  múltiplo de 4, para que los orificios de entrada y salida queden bien determinados en las condiciones de contorno según las dimensiones de la cavidad. Por tanto estudiaremos los casos  $N = 99, 119, 159$ .

| Número de Reynolds (Re) | $\alpha$ | Número de iteraciones |
|-------------------------|----------|-----------------------|
| 1                       | 1        | 6387                  |
| 1                       | 1,1      | 5353                  |
| 1                       | 1,2      | 4469                  |
| 1                       | 1,3      | 3701                  |
| 1                       | 1,4      | 3025                  |
| 1                       | 1,5      | 2422                  |
| 1                       | 1,6      | OVERFLOW              |
| 20                      | 1        | 5812                  |
| 20                      | 1,1      | 4868                  |
| 20                      | 1,2      | 4060                  |
| 20                      | 1,3      | 3359                  |
| 20                      | 1,4      | 2742                  |
| 20                      | 1,5      | 2194                  |
| 20                      | 1,6      | OVERFLOW              |
| 40                      | 1        | 5072                  |
| 40                      | 1,1      | 4262                  |
| 40                      | 1,2      | 3565                  |
| 40                      | 1,3      | 2957                  |
| 40                      | 1,4      | 2418                  |
| 40                      | 1,5      | OVERFLOW              |

Cuadro 1:  $\alpha$  óptimo y número de iteraciones para  $N=99$ .

Con los datos de la tabla anterior mostramos la siguiente representación gráfica:

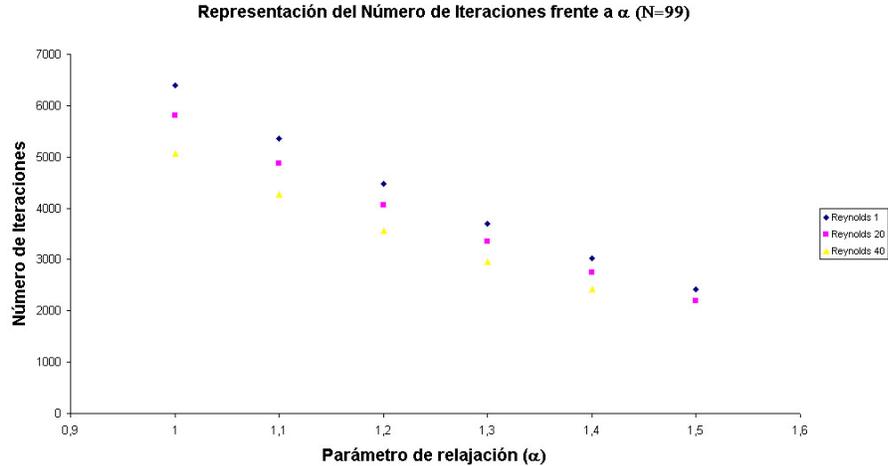


Figura 6: Representación del número de iteraciones frente a  $\alpha$ .

En esta representación se muestra como es la tendencia cuando nuestro mallado esta compuesto por 99 nodos. Como podemos ver para un mayor parámetro de relajación el número de iteraciones se reduce considerablemente, hasta llegar a un valor máximo de  $\alpha$  que para  $Re = 1, 20$  vale 1,5, mientras que para  $Re = 40$  el máximo sería 1,4. Para valores mayores de  $\alpha$ , obtendríamos OVERFLOW en la ejecución del programa. Como vemos para valores pequeños de  $\alpha$ , el número de iteraciones crece enormemente, incluso podríamos afirmar que tiene una tendencia exponencial de crecimiento. Obteniendo para  $\alpha = 1$  aproximadamente el doble de iteraciones que para el  $\alpha$  óptimo. Hemos considerado el valor  $\alpha = 1$  como el menor valor, debido a que el tiempo de ejecución aumentaba conforme disminuía  $\alpha$ , por ello no es de nuestro interés trabajar para valores menores que la unidad, ya que la convergencia es más rápida para valores mayores que 1. En principio el intervalo de  $\alpha$  estaba comprendido entre 0 y 2, para que el método de relajación converja, (ya que como no conocemos como es la matriz del sistema no podemos restringir el intervalo entre 0 y 1), pero finalmente vemos que el valor de  $\alpha$  óptimo se encuentra próximo a 1,5.

Ahora veamos los resultados para el caso en que hemos cambiado el número de nodos interiores a  $N = 119$ . Obviamente el número de nodos es un factor muy importante en la resolución del problema. A priori, se espera que cuando consideremos un mallado más estricto el número de operaciones será mayor y por tanto las iteraciones también aumentarían. En las siguientes figuras se muestran la tabla de datos de este caso junto con la representación gráfica que muestra la tendencia del número de iteraciones. Podemos observar que para  $N = 119$  la tendencia es la misma, conforme aumenta el valor de  $\alpha$  disminuye el número de iteraciones. Pero para este caso el número de iteraciones para el  $\alpha$  óptimo ha aumentado en mil iteraciones. Sin embargo, el valor óptimo sigue siendo el mismo aún habiendo aumentado el número de nodos.

| Número de Reynolds (Re) | $\alpha$ | Número de iteraciones |
|-------------------------|----------|-----------------------|
| 1                       | 1        | 8997                  |
| 1                       | 1,1      | 7545                  |
| 1                       | 1,2      | 6301                  |
| 1                       | 1,3      | 5220                  |
| 1                       | 1,4      | 4267                  |
| 1                       | 1,5      | 3416                  |
| 1                       | 1,6      | OVERFLOW              |
| 20                      | 1        | 8186                  |
| 20                      | 1,1      | 6862                  |
| 20                      | 1,2      | 5727                  |
| 20                      | 1,3      | 4740                  |
| 20                      | 1,4      | 3871                  |
| 20                      | 1,5      | 3097                  |
| 20                      | 1,6      | OVERFLOW              |
| 40                      | 1        | 7136                  |
| 40                      | 1,1      | 5998                  |
| 40                      | 1,2      | 5020                  |
| 40                      | 1,3      | 4166                  |
| 40                      | 1,4      | 3410                  |
| 40                      | 1,5      | OVERFLOW              |

Cuadro 2:  $\alpha$  óptimo y número de iteraciones para N=119.

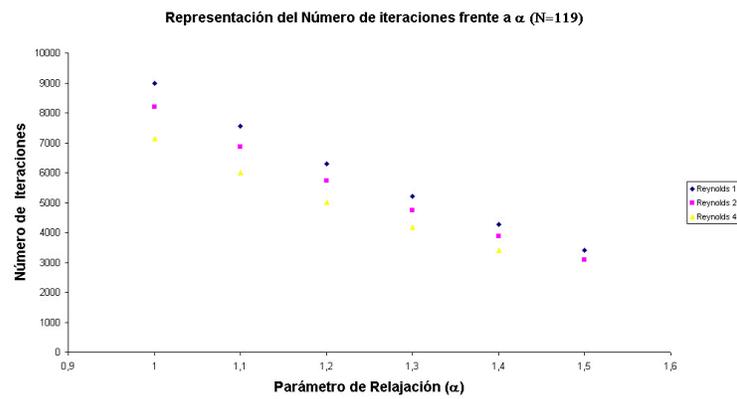


Figura 7: Representación del número de iteraciones frente a  $\alpha$ .

| Número de Reynolds (Re) | $\alpha$ | Número de iteraciones |
|-------------------------|----------|-----------------------|
| 1                       | 1        | 15428                 |
| 1                       | 1,1      | 12950                 |
| 1                       | 1,2      | 10824                 |
| 1                       | 1,3      | 8973                  |
| 1                       | 1,4      | 7339                  |
| 1                       | 1,5      | 5878                  |
| 1                       | 1,6      | OVERFLOW              |
| 20                      | 1        | 14031                 |
| 20                      | 1,1      | 11777                 |
| 20                      | 1,2      | 9841                  |
| 20                      | 1,3      | 8154                  |
| 20                      | 1,4      | 6664                  |
| 20                      | 1,5      | OVERFLOW              |
| 40                      | 1        | 12228                 |
| 40                      | 1,1      | 10280                 |
| 40                      | 1,2      | 8608                  |
| 40                      | 1,3      | 7150                  |
| 40                      | 1,4      | 5858                  |
| 40                      | 1,5      | OVERFLOW              |

Cuadro 3:  $\alpha$  óptimo y número de iteraciones para N=159.

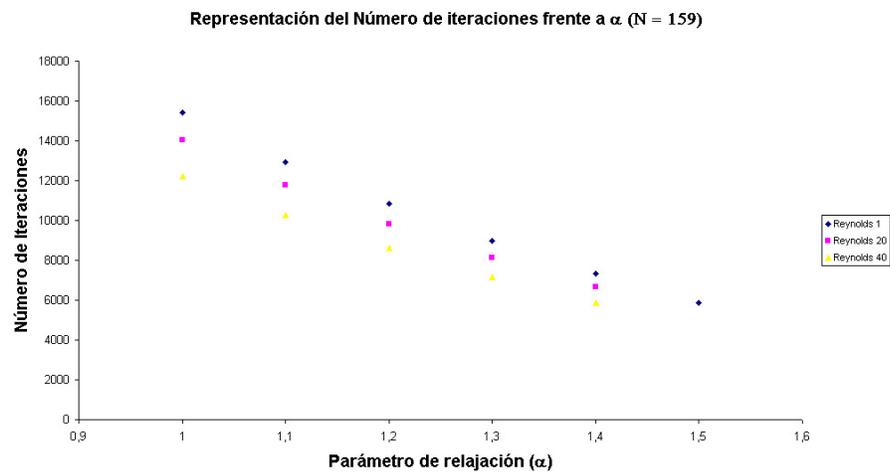


Figura 8: Representación del número de iteraciones frente a  $\alpha$ .

Por último hemos representamos el caso para  $N=159$ . La tendencia del número de iteraciones sería la misma que hemos indicado en los otros casos, como mostramos en la representación gráfica. Como era lógico esperar, al aumentar de nuevo  $N$  aumentarán el número de iteraciones. Aunque los valores de  $N$  que hemos tomado, se diferencien poco relativamente, se puede apreciar que los valores de las iteraciones aumentan enormemente al aumentar el número de nodos. Un aspecto importante a destacar es el comportamiento, la dependencia que existe entre el número de Reynolds y el valor del parámetro de relajación. El comportamiento es equivalente en los tres casos estudiados, cuando aumentamos el  $Re$  obtendremos que para el  $\alpha$  óptimo siempre será menor que para  $Re$  altos. Esto quiere decir, que cuanto mayor sea  $Re$  del fluido a considerar, menor será el parámetro de relajación, además menor es el número de iteraciones que se han de realizar para obtener la solución. Luego la tendencia que aparecen en nuestras representaciones, es que al aumentar el número de Reynolds, disminuyen el número de iteraciones, y también el valor de  $\alpha$  óptimo.

## 5. Análisis del problema en paralelo

Una vez hemos comprobado que nuestro programa se ejecuta convenientemente en secuencial, damos un paso más, y abordamos el estudio de su ejecución en paralelo. Para ello, las únicas modificaciones necesarias sobre el código, son las relacionadas con la distribución de los datos, y los correspondientes mandatos de paralelización, usando HPF (High Performance FORTRAN, una extensión de F90 desarrollada precisamente para trabajar de forma paralela), si bien éstos podían haber sido incluidos igualmente en el código a ejecutar en secuencial, ya que el compilador, debido a su particular semántica, las interpreta como líneas de comentario. En definitiva, tenemos el código completo expuesto en el apartado 3.

Además de las modificaciones concernientes al código, hemos de cambiar, como es lógico, la forma de proceder, ya que el compilador hasta ahora utilizado no nos sirve. En su defecto, trabajaremos en la siguiente forma: escribiremos nuestro código fuente usando las pertinentes sentencias de HPF, y lo compilaremos usando ADAPTOR (Automatic Data Parallelism Translator), un sistema de compilación para HPF, de dominio público, que nos permite trabajar con HPF sobre un ordenador paralelo virtual formado por máquinas de arquitectura homogénea conectadas entre sí. ADAPTOR transforma los programas escritos en HPF en programas con paso de mensajes explícitos, y posteriormente este programa fuente con el compilador FORTRAN correspondiente, en nuestro caso, F77<sup>1</sup>. Mediante esta traducción de fuente a fuente, ADAPTOR transforma el programa paralelo en un programa equivalente para ser ejecutado sobre los procesadores disponibles.

Previamente habremos de haber construido nuestro ordenador paralelo virtual, para lo que contamos con una serie de sentencias que nos permiten diseñar la red a partir de los ordenadores disponibles. A estos efectos, es necesaria también una librería que permita el paso de mensajes; esto es, que permita comunicar los procesadores de las diferentes máquinas: trabajaremos con MPI (Message Passing Interface)

---

<sup>1</sup>El hecho de usar un compilador de F77 hace que tengamos que tomar ciertas precauciones a la hora de escribir el código fuente, tales como no exceder el número de caracteres máximo por línea, o la colocación de las líneas de comentario en la primera columna, propias de la semántica del F77.

para tales fines.

Así, la secuencia de comandos que nos permitirá preparar nuestro equipo, podríamos resumirla:

- Compilación del código: `gmdhpf fuente.hpf`
- Conexión de los ordenadores sobre los que queremos trabajar: `recon v maquinas.txt`, estando explicitados en este fichero de texto los ordenadores sobre los que queremos lanzar el proceso
- Activación de MPI en dichos ordenadores: `lamboot v maquinas.txt`
- Lanzamos el programa sobre los ordenadores: `mpirun ejecutable`
- En el caso de querer recomenzar el proceso, hemos de limpiar toda la construcción anterior; usamos para ello el comando `lamwipe -v`

Después de esto, estaremos en condiciones de ejecutar nuestro programa en paralelo.

De acuerdo a la estructura de nuestro problema, y al método de resolución escogido, parece evidente que la mejor distribución de nuestros datos nuestras matrices- será una distribución bloque-bloque. Trabajaremos pues con esta distribución, y, para tener una segunda referencia paralela para comparar, ejecutaremos también nuestro programa con la distribución que por defecto introduce HPF. Esto implicará ejecutar el código con y sin la sentencia alusiva a esta distribución.

Además, lanzaremos el programa sobre 1, 2 y 4 procesadores (variable  $p$ ), de modo que podamos comparar las diferentes ganancias y eficiencias.

Repetiremos el estudio para cada uno de los siguientes valores del número de Reynolds (variable  $Re$ ): 1, 20 y 40, teniendo presente el valor de alfa óptimo que habíamos encontrado para cada uno de ellos en el estudio secuencial.

En definitiva, para cada una de las distribuciones escogidas, obtendremos un conjunto de valores  $\langle t \rangle \leftrightarrow p \leftrightarrow Re$ . Los exponemos en la siguiente tabla:

|                  |       | BLOQUE-BLOQUE |        |        | POR DEFECTO |        |        |
|------------------|-------|---------------|--------|--------|-------------|--------|--------|
|                  |       | Re= 1         | Re= 20 | Re= 40 | Re= 1       | Re= 20 | Re= 40 |
| Tiempo medio (s) | p = 1 | 34,272        | 31,33  | 35,072 | 36,4        | 33,601 | 39,593 |
|                  | p = 2 | 57,908        | 53,078 | 57,233 | 29,635      | 28,476 | 29,677 |
|                  | p = 4 | 68,144        | 61,887 | 63,828 | 28,97       | 26,863 | 30,471 |

Figura 9: Tabla de tiempos en función del número de procesadores, tipo de distribución y  $Re$ .

donde cabe llamar la atención sobre el hecho de que los tiempos para un solo procesador son los correspondientes tiempos secuenciales del problema para las condiciones dadas.

A partir de estos valores recogidos, podemos hacer un estudio sobre las condiciones óptimas para la resolución de nuestro problema; de esta forma no será necesario realizar el tratamiento de los datos (graficación usando matlab) en todos los casos, sino que lo haremos para las situaciones más significativas, incluida, evidentemente, la óptima.

La primera idea sobre la bondad de los distintos procedimientos podemos obtenerla de los valores de la ganancia en velocidad,  $S_p$ , y la eficiencia paralela,  $\eta$ . Así, recordando la definición de estos dos parámetros:

- GANANCIA EN VELOCIDAD PARALELA:  $S_p = \frac{T_s}{T_p} = \frac{T_{ejecucion\ secuencial}}{T_{ejecucion\ paralelo}}$
- EFICIENCIA PARALELA:  $\eta = \frac{S_p}{p}$

podemos construir esta otra tabla de valores:

|        |       | BLOQUE-BLOQUE |         |         | POR DEFECTO |         |         |
|--------|-------|---------------|---------|---------|-------------|---------|---------|
|        |       | Re= 1         | Re= 20  | Re= 40  | Re= 1       | Re= 20  | Re= 40  |
| $S_p$  | p = 2 | 0,59183       | 0,59026 | 0,61279 | 1,22827     | 1,17997 | 1,33413 |
|        | p = 4 | 0,50293       | 0,50624 | 0,54947 | 1,25647     | 1,25082 | 1,29936 |
| $\eta$ | p = 2 | 0,29591       | 0,29513 | 0,30639 | 0,61413     | 0,58998 | 0,66706 |
|        | p = 4 | 0,12573       | 0,12656 | 0,13736 | 0,31411     | 0,31270 | 0,32484 |

Figura 10: Tabla de ganancia y eficiencia en función del número de procesadores, tipo de distribución y Re.

Basándonos en los valores reflejados en estas tablas, podemos hacer el siguiente análisis:

1. Si evaluamos cómo varían los tiempos de ejecución con los valores del número de Reynolds, repitiendo el estudio para los distintos números de procesadores y distribuciones de datos, obtenemos un gráfico<sup>2</sup> como el que sigue (estas representaciones pueden suponer una útil herramienta, para, dado un valor del número de Reynolds normalmente viene fijado- saber cuántos procesadores son necesarios para una ejecución óptima):

---

<sup>2</sup>A las gráficas que vamos a presentar en el desarrollo del trabajo, les hemos agregado líneas de tendencia. Estas líneas no tienen carácter real, y sólo se han añadido para hacer más visibles los resultados, ya que con diagramas de puntos pueden quedar confusos.

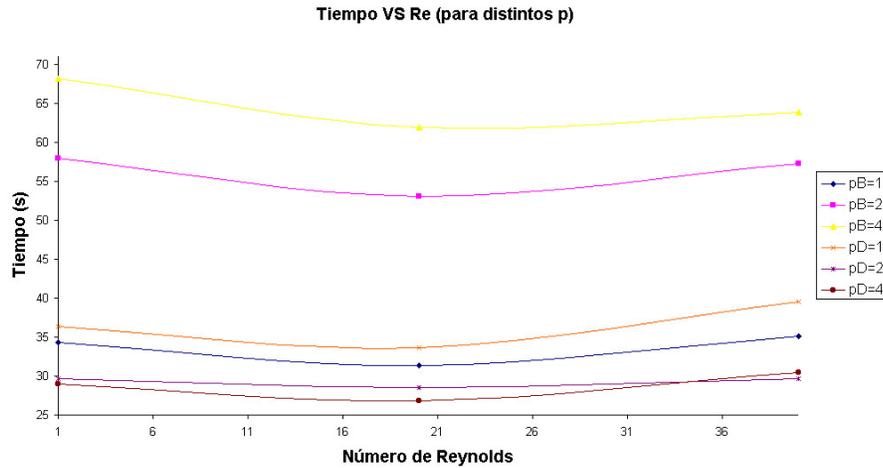


Figura 11: Representación del Tiempo frente al Número de Reynolds.

donde  $pB=1$  hace referencia a un sólo procesador con una distribución bloque-bloque, mientras que  $pD=1$  hace referencia a un sólo procesador usando la distribución por defecto. Lo primero que llama la atención es que los mejores resultados corresponden al caso en que dejamos que HPF distribuya los datos por defecto; más aún, de los tiempos correspondientes a la distribución bloque-bloque, se observa que el mejor es el de la ejecución secuencial ( $p = 1$ ). Todo esto puede hacernos pensar que la distribución bloque-bloque no es una buena distribución para nuestro problema. Este pensamiento sólo es verdad en parte, ya que si bien los resultados experimentales significan un contundente argumento en este sentido, el análisis teórico de la distribución de los datos apuntaba claramente hacia la distribución escogida. No obstante, debido a que las condiciones de ejecución del código no han sido óptimas, pues, entre otras cosas, la red estaba siendo usada simultáneamente para otros procesos, la bondad teórica de la distribución bloque-bloque puede haberse visto entorpecida por la limitación de nuestro ordenador virtual en cuanto a las comunicaciones.

De acuerdo a todo esto, la resolución de nuestro problema de la cavidad, habría que abordarla, para el dispositivo técnico disponible, dejando que HPF distribuya los datos por defecto, sin que esto signifique un criterio de generalidad respecto a la posibilidad de poder lanzar el programa sobre una red de mejores características.

Aceptando, entonces, como distribución óptima la de HPF, podemos observar un nuevo hecho: para el rango de números de Reynolds evaluado, los tiempos decrecen a partir de uno inicial, alcanzan un mínimo y cambian su comportamiento a creciente. Este comportamiento no tiene una explicación clara, ya que si sólo se presentara para las ejecuciones en paralelo, podría ser achacado a la importancia relativa del volumen de comunicaciones en cada caso; sin embargo, el hecho de que la ejecución secuencial presente esta misma tendencia, parece invalidar, al menos como justificante principal, el razonamiento anterior. Aún así, tomando como referencia las evoluciones de los procesos

secuenciales, no es extraño que los procesos paralelos presenten una tendencia similar.

Donde sí que parece tomar relevancia el papel de las comunicaciones, es, trabajando para números de Reynolds altos. Así, si nos fijamos en la gráfica, podemos observar que llega un momento donde no compensa aumentar el número de procesadores, debido a que el volumen de las comunicaciones ya se ha hecho más importante que los beneficios del trabajo en paralelo.

2. Si tomamos ahora como variable independiente el número de procesadores, y analizamos los tiempos para los diversos números de Reynolds y distribuciones, obtenemos esta otra gráfica:

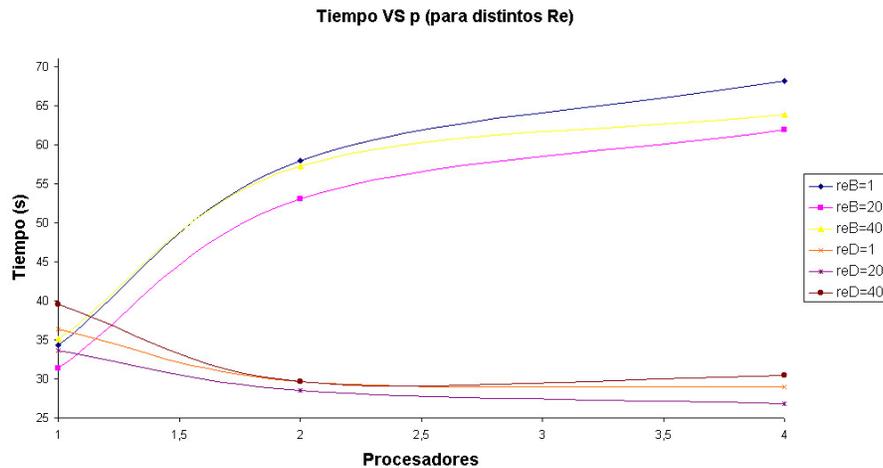


Figura 12: Representación del Tiempo frente al Número de procesadores.

Aquí vuelve a quedar de manifiesto, aún de forma más clara que en el caso anterior, la inconveniencia de emplear la distribución bloque-bloque para resolver nuestro problema de forma paralela sobre el dispositivo disponible. Por lo demás podríamos obtener conclusiones similares a las expuestas anteriormente: se comprueba que mientras el problema no se complica en exceso (Reynolds no demasiado alto, que implica menos volumen de comunicaciones) el tiempo de ejecución decrece con el número de procesadores (es lo que se observa para  $Re = 1, 20$ ); cuando el problema es más complejo, más procesadores no implica menos tiempo. En este sentido, hay que tener presente igualmente la ley de Amdhal, que predice este fenómeno en función de la importancia relativa de las fracciones secuenciales y paralelas del código; esto es, aun manteniendo condiciones sencillas para el problema, siempre llega un momento en que no compensa el aumento en el número de procesadores, alcanzando éstos, además, una eficiencia muy baja.

3. Una medida cuantitativa de todo lo anterior, la tenemos, como ya indicamos, en la ganancia y la eficiencia calculadas. Aunque a partir de los valores numéricos ya podríamos obtener determinadas conclusiones, quizá quede más claro un análisis gráfico en la línea de los anteriores. Para ello, haremos representaciones de esas magnitudes frente al número de Reynolds.

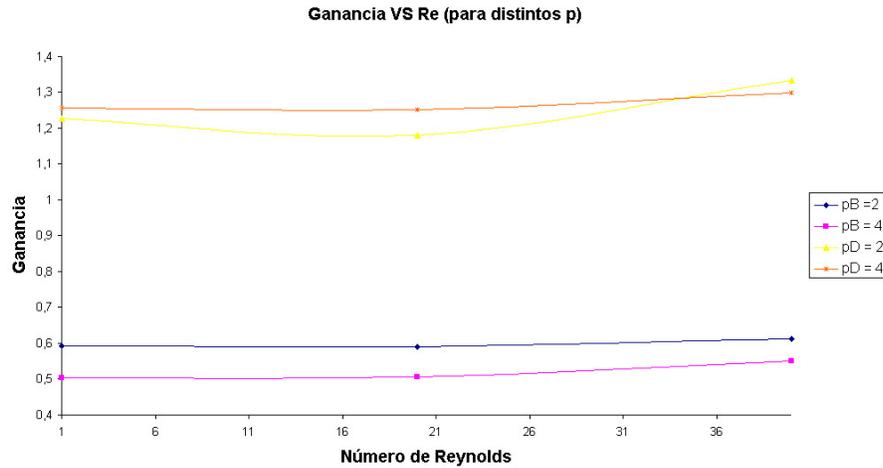


Figura 13: Representación de la Ganancia frente al Número de Reynolds.

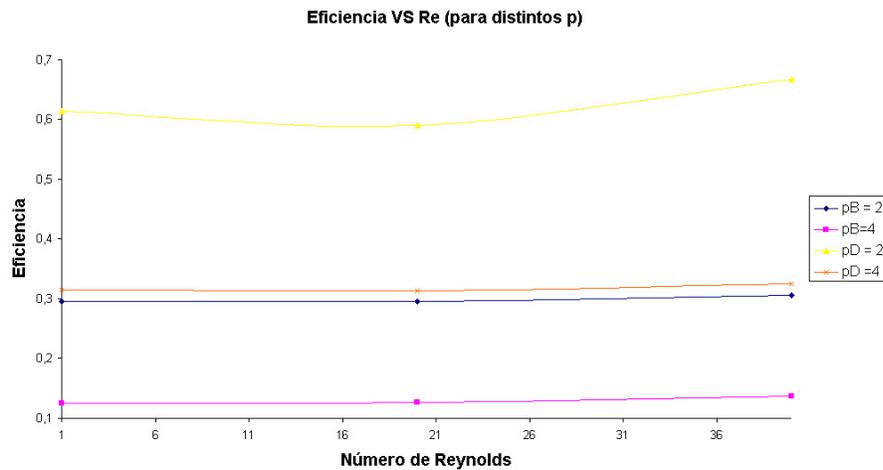


Figura 14: Representación de la Eficiencia frente al Número de Reynolds.

El análisis de estas representaciones redunda en las conclusiones que hemos ido obteniendo anteriormente. Pero, aún más, evidencian de forma más contundente las condiciones óptimas de trabajo. Así:

- Hemos de trabajar con la distribución que introduce HPF por defecto
- Para Reynolds 1 y 20 la ganancia es mayor si usamos 4 procesadores; para Reynolds 40, es mejor limitarnos a 2 procesadores.
- Independientemente del número de Reynolds la eficiencia de los procesadores es, con diferencia,

mejor si usamos sólo dos procesadores.

En definitiva, y a la luz de todo lo expuesto, podemos decir a forma óptima de abordar nuestro problema de la cavidad es lanzar el programa paralelo sobre dos procesadores, con independencia del número de Reynolds con el que estemos trabajando, ya que, aunque el tiempo de ejecución es algo mejor para Reynolds 1 y 20 usando 4 procesadores, el tiempo empleado en redefinir el ordenador virtual y relanzar el proceso, invalidaría esta ganancia teórica. Además, tal y como indica la eficiencia obtenida, en estas condiciones 2 procesadores- estaríamos aprovechando de mejor modo los recursos disponibles.

## 6. Resultados

Para visualizar las soluciones obtenidas a partir del análisis numérico hemos usado un script escrito en MatLab que lee los datos obtenidos por el programa mediante unos ficheros y es capaz de visualizar los resultados. A continuación vamos a presentar los resultados que se obtienen de la solución numérica (para cada número de  $Re = 1, 20, 40$ ), en particular las líneas de corriente y el campo de velocidades que son las que verdaderamente tienen significado físico.

1.  $Re = 1$ . Para el primer caso con  $Re = 1$  y para un número de nodos interiores  $N = 99$ , las líneas de corriente serían:

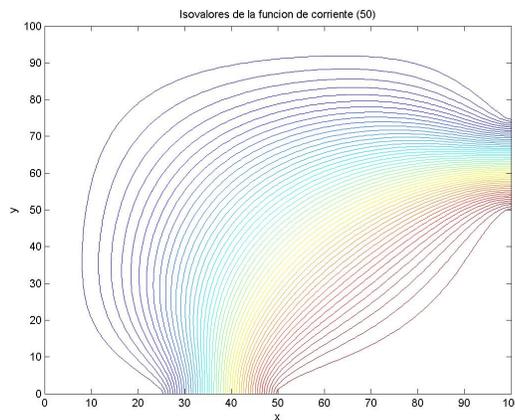


Figura 15: Isovalores de la función de corriente para  $Re = 1$

El significado de las líneas de corriente se puede entender que para  $\psi = cte$  coinciden con las líneas de corriente, esto implicaría que las líneas de corriente son ortogonales en todo punto a  $\nabla\psi$ . Recordemos que  $\psi$  se ha introducido como consecuencia de trabajar con un campo de velocidades conservativo, por tanto, será una función potencial, donde la velocidad será tangencial a estas líneas de corriente. En esta representación observamos como las líneas de corriente de nuestro fluido están entrando por la cavidad derecha y saliendo por la cavidad de abajo. Si nos situamos en una línea,

y nos movemos a lo largo de ella, tendremos que todos esos puntos tienen el mismo valor de la función de corriente. De este modo lo que tenemos es una distribución de las líneas de corriente, que según el código de colores se puede observar que aquellas líneas más externas son las de menor valor, mientras que las interiores son de mayor valor. Esto parece lógico, puesto que la trayectoria del fluido es esencialmente del orificio de entrada al de salida.

El campo de velocidades para  $Re = 1$  sería:

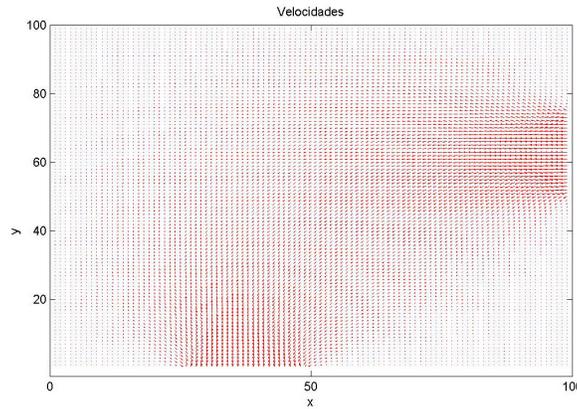


Figura 16: Campo de velocidades para  $Re = 1$

Esta representación está íntimamente ligada a la representación de las líneas de corriente que hemos visto. En esta representación aparece el campo de velocidades en todo el dominio donde se encuentra el fluido. Hemos de resaltar que aquellas zonas más intensas se corresponden con las zonas también más intensas en la representación de los isovalores. La zona central es la zona donde el fluido tiene mayor velocidad. Esto se podía conocer en la representación anterior donde las curvas interiores son más intensas en color.

2.  $Re = 20$ . Veamos el caso para un número de Reynolds mayor, para este caso las representaciones de las líneas de corriente y del campo de velocidades son aparentemente iguales, la diferencia entre representaciones son ínfimas. Hemos de tener en cuenta que al aumentar el número de Reynolds, esto significa que el coeficiente de viscosidad del fluido será menor que en el caso anterior, esto se traduce en que tendremos que tratar nuestro fluido como un fluido más turbulento que para  $Re = 1$ , y por tanto habrá un aumento de los vórtices en el movimiento del fluido. El hecho de que el fluido sea poco viscoso significa que en la representación de los isovalores de la función de corriente las líneas estarán muy separadas, evidentemente esto se traduce que en la representación de los isovalores tendremos un gradiente más lento, es decir, al tener más líneas tendremos más valores de la función de corriente. En este caso de viscosidad baja aparecerían vórtices, mientras que para fluidos muy viscosos aparentemente los vórtices se podrían despreciar.

Entonces las representaciones para el caso de  $Re = 20$  quedarían como:

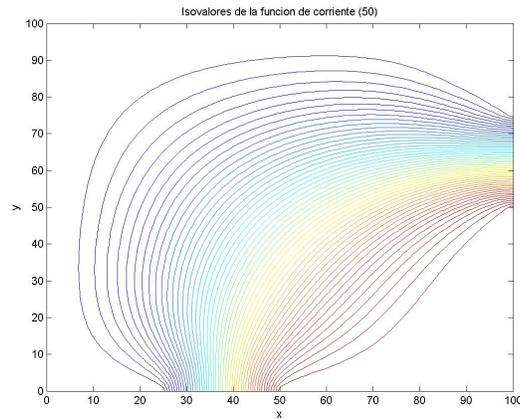


Figura 17: Isovalores de la función de corriente para  $Re = 20$

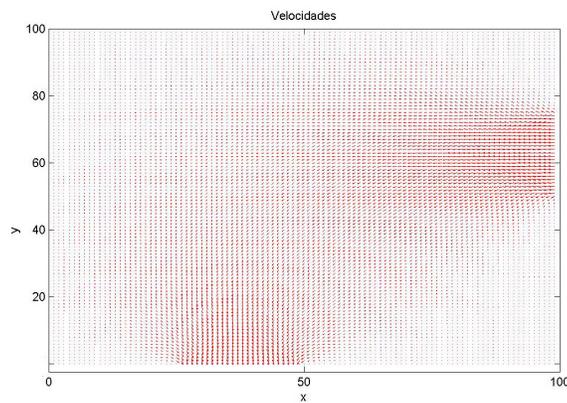


Figura 18: Campo de velocidades para  $Re = 20$

3.  $Re = 40$ . Por último trataremos el caso para un número de Reynolds  $Re = 40$ . Al igual que hemos dicho anteriormente al aumentar el número  $Re$  estaremos trabajando con un fluido más turbulento, luego para los tres casos que abarcamos este sería el de mayor régimen de turbulencia. En el primer caso cuando  $Re = 1$  estaríamos trabajando en un régimen laminar, donde el movimiento del fluido es regular y apenas aparecen vórtices debido a que la viscosidad del fluido es grande. Las representaciones para  $Re = 40$  serán:

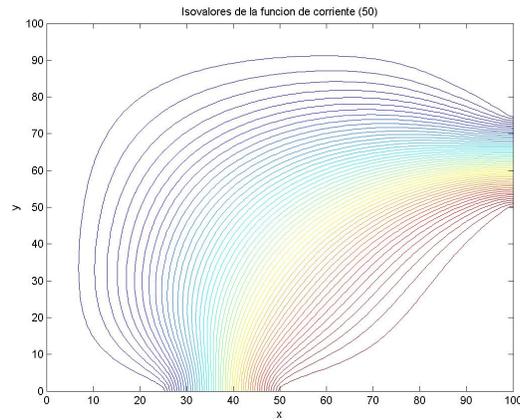


Figura 19: Isovalores de la función de corriente para  $Re = 40$

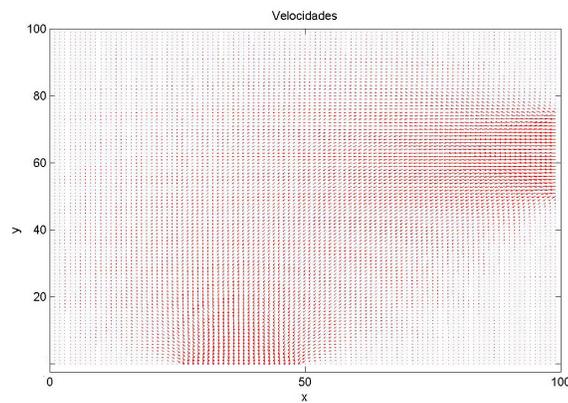


Figura 20: Campo de velocidades para  $Re = 40$

Por último cabría decir algo respecto a los resultados de la vorticidad. Nos centraremos en el caso intermedio en que  $Re = 20$ . Esta vorticidad no tiene una interpretación física evidente como la de las líneas de corriente, que nos describen la trayectoria del fluido. No obstante, merece la pena observar en qué zonas del dominio afecta en mayor grado esta función vorticidad, por su influencia posterior en el cálculo de la función de corriente, para lo que presentamos la correspondiente gráfica con sus isovalores. Como podemos ver, los valores más elevados corresponden a los extremos de los orificios; esto tiene sentido si asociamos esta función con la idea intuitiva de la formación de remolinos en el fluido.

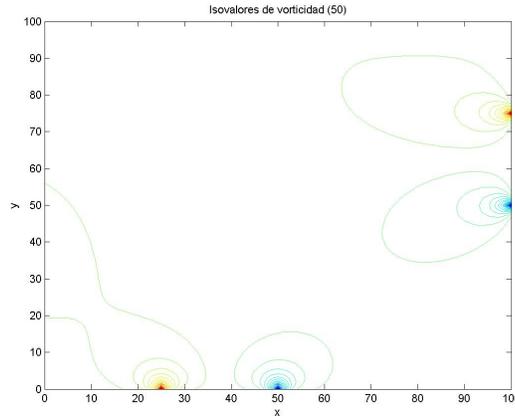


Figura 21: Isovalores de vorticidad para  $Re = 20$

## 7. Trabajando con Reynolds superiores

Abordando la resolución de nuestro problema de la cavidad, con entrada y salida de flujo, con el código expuesto, encontramos una limitación en cuanto al número de Reynolds, y es que para números altos, el programa deja de converger.

Una forma de afrontar esta limitación, de modo que podamos ampliar el rango de números de Reynolds de trabajo (y por tanto, el rango de medios reales), es ejecutar nuestro mismo programa pero usando como valor de iniciación de nuestras matrices solución, no matrices nulas, si no, en su lugar, aproximaciones obtenidas de resolver el problema en condiciones menos exigentes.

Esto se consigue fácilmente introduciendo en el código la correspondiente orden de lectura desde fichero; fichero en el que previamente habremos guardado las soluciones de otra situación más sencilla.

Actuando de este modo, conseguimos, por ejemplo, poder ejecutar nuestro código (nos limitamos al estudio secuencial, pues sólo queremos poner de manifiesto que con esta modificación podríamos ampliar nuestro rango de trabajo) para un número de Reynolds de 80, lo cual era imposible, por divergencia, usando el código con la inicialización usual.

Pero aún más, además de para acometer situaciones inabordables con el programa tal cual, la introducción de esta modificación hace también que aún en casos para los que obteníamos solución por el procedimiento normal, el número de iteraciones necesarias se reduzca.

Así, para Reynolds 50, tomando como óptimo  $\alpha = 1,4$ , tenemos:

- El número de iteraciones al ejecutar el código con inicialización a cero es de 2282
- Si usamos como aproximación inicial los resultados de ejecutar el programa para Reynolds 40, el número de iteraciones se reduce a 1183

Prácticamente, pues, reducimos el número de iteraciones en 1100, o lo que es lo mismo, en más de un 48%.

Por todos esto, sería bastante conveniente introducir en nuestro código esta opción de trabajo a partir de ficheros externos.

## 8. Conclusión

El objetivo de este trabajo ha sido doble: por una parte encontrar un código que modelara y resolviera el problema del flujo en una cavidad con entrada y salida de fluido, y por otra, introducir las convenientes modificaciones en el mismo para lograr su ejecución en paralelo.

Para la consecución de ambos, hemos tenido que acometer, pues, un completo análisis del problema en cuestión, evaluando desde la base físico-matemática que lo modela, hasta las condiciones óptimas de resolución numérica, pasando por un detenido estudio sobre los diferentes métodos numéricos aplicables.

En todo este desarrollo fueron surgiendo distintas dificultades, que resolvimos con más o menos éxito, de acuerdo a los recursos disponibles. Finalmente, obtuvimos una serie de resultados, en nuestra opinión, bastante satisfactorios. Así, merece la pena insistir en algunos de los aspectos encontrados:

- Aunque nuestro objetivo fuese lograr lanzar el programa en paralelo, la parte del trabajo que más tiempo nos llevó fue la del análisis secuencial del mismo. Y es que, para abordar el estudio paralelo es imprescindible contar con un buen código secuencial.
- Un problema como el planteado cuenta con diferentes variables, con cuyas combinaciones, imponemos distintas condiciones para la resolución. Entre estas variables tenemos, el número de nodos del mallado, el valor óptimo del parámetro de relajación, el número de Reynolds, la tolerancia con la que queremos obtener el resultado final, el número de procesadores sobre el que queremos lanzar el programa en paralelo... Nosotros hemos intentado dar una idea general de cómo influye cada uno de estos parámetros en la resolución del problema, pues debido a la gran cantidad de combinaciones, sería inabordable un estudio más detallado. Además, al resolver problemas reales, algunos de estos parámetros ya vienen determinados (como puede ser el número de Reynolds o el número de procesadores disponible) por lo que tampoco tiene mucho sentido insistir más en variaciones arbitrarias de estos parámetros hasta que trabajemos sobre un problema bien definido a este respecto.
- La dependencia que existe entre los métodos numéricos, y las máquinas sobre las que se llevan a cabo es otro factor importante a tener en cuenta en nuestro estudio, no tanto en el análisis secuencial, como en el paralelo. Puesto que en realidad no hemos trabajado con un ordenador paralelo, sino que lo hemos construido de manera virtual, es lógico que puedan aparecer contradicciones entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas, tal y como comprobamos al resolver nuestro problema con la distribución de datos tipo bloque-bloque. Sin embargo, esto no debe alarmarnos; debemos considerar el equipo disponible como otra variable más en nuestro trabajo.

Con todo esto, consideramos que el trabajo realizado es de notable calidad, quizá no tanto por los resultados numéricos obtenidos (que no son malos) como por la oportunidad que nos ha ofrecido de

enfrentarnos a un problema, más o menos real, y afrontar su resolución palpando muchas de las situaciones hasta ahora sólo abordadas de forma teórica.

## 9. Referencias

- Mecánica de Fluidos. Landau, L.D. y Lifshitz, E.M. Editorial Reverté, S.A, 1991
- <http://www.monografias.com/trabajos10/resumen/resumen.shtml#NEWTON>
- <http://www.mas.ncl.ac.uk/~sbrooks/book/nish.mit.edu/2006/Textbook/>
- <http://hidraulica.unalmed.edu.co/Materias/Quiceno/Principal.html>
- <http://www.nd.edu/~msen/TermoLat/MecFlWord.pdf>
- Apuntes Programación Científica Avanzada. 5 curso Licenciatura Ciencias Físicas. Universidad de Córdoba. 2002/2003
- Apuntes Ampliación Métodos Numéricos. 5 curso Licenciatura Ciencias Físicas. Universidad de Córdoba. 2002/2003
- Latex para Linux (Red Hat 8.0)