FORMULAS DE ANALISIS VECTORIAL

Índice

1. El Operator ∇

1.1. Aplicaciones de Nabla

- Sobre un escalar (φ).

  Gradiente $\equiv \overrightarrow{\nabla \cdot \varphi}$

- Sobre un vector ($\vec{A}$).

  Divergencia $\equiv \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

- Sobre un vector. Rotacional $\equiv \nabla \times \vec{A}$

$$\nabla \times \vec{A} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

- Aplicación diádica o tensorial sobre un campo vectorial:

  Gradiente de un campo vectorial $\equiv (\nabla\vec{A})_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$.

- Operador Laplaciano

  $\triangle \equiv \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

  Es un operador diferencial, al ser la divergencia del gradiente no tiene carácter vectorial sino que es un escalar.

1.2. Algunos resultados interesantes

- **Rot Grad** $(\varphi) = \nabla \times \nabla = 0$
- **Giv Rot** $(\vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$
- **Rot Rot** $(\vec{A}) = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \triangle\vec{A}$
- **Rot** $(\varphi\vec{A}) = \varphi\nabla \times \vec{A} + \nabla\varphi \times \vec{A} = 0$
- **Grad** $(\sigma\varphi) = \varphi \cdot Grad(\sigma) + \sigma \cdot Grad(\varphi)$
- **Grad** $(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{A}) \cdot \vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{A} + \vec{A} \times Rot(\vec{B}) + \vec{B} \times Rot(\vec{A})$
- **Div** $(\varphi\vec{A}) = Grad(\varphi) \cdot \vec{A} + \varphi \cdot Div(\vec{A})$ç
- **Div** $(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot Rot(\vec{A}) + \vec{A} \cdot Rot(\vec{B})$
- **Rot** $(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot Div(\vec{B}) - \vec{B} \cdot Div(\vec{A}) + (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{A}$
- **Div Grad** $(\varphi\sigma) = 2\nabla\sigma \cdot \nabla\varphi + \varphi\triangle\varphi + \varphi\triangle\sigma$

2. Coordenadas curvilíneas. Relaciones útiles

2.1. Coordenadas curvilíneas generales

- Vectores base ($\hat{e}_i$) en un punto M

$$\hat{e}_i(M) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{\mid \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \mid}$$

- Factores de escala $h_i = \mid \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{q_i}} \mid$

  Entonces:

$$\hat{e}_i(M) = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \Longrightarrow d\vec{r} = \sum_{k=1}^{n} h_i dq_i \hat{e}_i$$

- Expresiones útiles:
  - Distancia entre dos puntos $ds^2 = \sum h_i^2 dq_i^2$
  - Elemento de arco: $ds = \sqrt{\sum h_i^2 dq_i^2}$
  - Elemento de superficie: $d\vec{S} = h_2h_3dq_2dq_3\hat{e_1} + h_3h_1dq_3dq_1\hat{e_2} + h_1h_2dq_1dq_2\hat{e_1}$
  - Elemento de volumen: $dV = h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3$

2.2. Coordenadas esféricas

Ecs.Transformacion	Factores de escala	Vectores base
$x = rsen\theta cos\phi$	$h_r = 1$	$\hat{e}_r = sen\theta cos\phi\hat{\imath} + sen\theta sen\phi\hat{\jmath} + cos\theta\hat{k}$
$y = rsen\theta sen\phi$	$h_r = r$	$\hat{e}_\theta = cos\theta cos\phi\hat{\imath} + cos\theta sen\phi\hat{\jmath} - sen\theta\hat{k}$
$z = rcos\theta$	$h_r = rsen\theta$	$\hat{e}_\phi = -sen\phi\hat{\imath} + cos\phi\hat{\jmath}$

Cuadro 1: C. Esféricas

$\boxed{Velocidad}$ $\vec{v} = \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta} + \dot{\phi}rsen\theta\hat{e_\phi}$

$\boxed{Aceleracion}$ $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2 rsen\theta)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\phi)\hat{e_\theta} + (\ddot{\phi}rsen\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}sen\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}cos\theta)\hat{e_\phi}$

2.3. Coordenadas cilíndricas

Ecs.Transformacion	Factores de escala	Vectores base
$x = \rho cos\phi$	$h_r = 1$	$\hat{e}_\rho = cos\phi\hat{\imath} + sen\phi\hat{\jmath}$
$y = \rho sen\phi$	$h_r = r$	$\hat{e}_\phi = -sen\phi\hat{\imath} + cos\phi\hat{\jmath}$
$z = z$	$h_r = 1$	$\hat{e}_z = \hat{k}$

Cuadro 2: C. Cilíndricas

$\boxed{Velocidad}$ $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e_\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{e_\theta} + \dot{z}\hat{e_z}$

$\boxed{Aceleracion}$ $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)e_\rho + (\rho\ddot{\phi} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e_\theta} + \ddot{z}\hat{e_z}$

2.4. Operador nabla

Finalmente, se puenden generalizar las expresiones anteriores para cualesquiera coordenadas curvilíneas.

- ***Gradiente*** $\equiv \nabla\Phi = \sum \frac{1}{h_i}\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\hat{e}_i$
- ***Divergencia*** $\equiv \nabla\cdot\vec{A} = \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2)\right]$
- ***Rotacional***

$$\nabla\times\vec{A} \equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1 A_x & h_2 A_y & h_3 A_z \end{vmatrix}$$

- ***Laplaciana***

$$\triangle(\Phi) \equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right]$$

3. Integración

3.1. Curvas en $\mathbb{R}^n$

- Segmento de extremos p,q $\epsilon \mathbb{R}^n$, [p,q]

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \quad ; \quad \gamma(t) = (1-t)p + tq$$

- Elipse de semiejes a y b

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \gamma(t) = (acos(t), bsen(t))$$

- Gráficas de cualquier función real de variable real continua

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad ; \qquad \gamma(t) = (t, f(t))$$

  si ademas su gráfica es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces su gráfica es una curva regular simple

- Circunferencia de centro (a,b) y radio r

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad ; \qquad \gamma(t) = (a + rcos(t), b + rsen(t))$$

- Suma de curvas:

$$\gamma(t) + \sigma(t) \equiv \begin{cases} \gamma(t) & si \quad t\epsilon[a,b] \\ \sigma(t-b+c) & si \quad t\epsilon[b, b+d-c] \end{cases}$$

- Suma formal de curvas: Dadas m curvas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ en $\mathbb{R}^n$ se define como $\gamma \equiv \Sigma_{i=1}^{m} \gamma_m$
- Longitud de una curva: Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva es regular a trozos

$$l(\gamma) \equiv \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$

3.2. Integral de línea de un campo escalar

Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos, U un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\gamma * \subseteq U$ (donde $\gamma *$ es la imagen de γ),y $f : U \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Se define la integral de f a lo largo de la curva γ **o integral de linea respecto de la longitud f sobre la curva** γ, mediante la siguiente expresión.

$$\boxed{\int_\gamma f(s)ds \equiv \int_a^b \langle f(s) \circ \gamma(t), ||\gamma'(t)|| \rangle dt}$$

3.2.1. Interpretaciones

- **Masa total de un alambre**

  Teniendo este una densidad constante podemos escribir la masa de dicho alabre delimitada por su curva γ(t) que se escribe como

$$M_A = d_0 l\gamma(t) \equiv d_0 \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$

  En el caso de densidad variable tendremos una *función* f que nos describe como varia esta.

$$M_A \equiv \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'||dt = \int_\gamma f(s)ds$$

- **Área o volumen de un recinto**

  Si aplicamos la definición de integral de línea en el caso de n=1 y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $\gamma(t) = t$, se tiene que

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(t)dt$$

  que geométricamente representa el área del recinto comprendido entre la gráfica de f y el eje x. Análogamente, para n=2, $\int_\gamma f(s)ds$ representa el volumen del recinto comprendido entre la gráfica de $z = f(x,y)$ y el plano xy.

- **Centros de masa**

$$\overline{x} = \frac{My, z}{M} \quad ; \overline{y} = \frac{M_{x,z}}{M} \quad ; \overline{z} = \frac{M_{x,y}}{M}$$

- **Momentos estáticos**

$$M_{x,y} \equiv \int_\gamma zf(x,y,z)ds \quad ; \quad M_{x,z} \equiv \int_\gamma yf(x,y,z)ds \quad ; \quad M_{y,z} \equiv \int_\gamma xf(x,y,z)ds$$

- **Valor medio de un campo haescalar sobre una curva γ**

$$\overline{f}_\gamma = \frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma f(s)ds$$

3.3. Integrales de línea sobre un campo vectorial

3.3.1. Integrales curvilíneas

Dado U abierto de $\mathbb{R}^n$, una curva regular a trozos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma * \subseteq U$, y un campo vectorial continuo $F : U \to \mathbb{R}^n$,se define la **integral de F a lo largo de la curva** $\gamma(t)$, mediante la expresión

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot ds \equiv \int_a^b \langle F(s) \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt}$$

- **Campos consevativos**

  Teorema : *(Regla de Barrow para la integral de línea) Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $G : U \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ con $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos con $\gamma * \subseteq U$. Entonces*

$$\boxed{\int_\gamma \nabla G \cdot ds \equiv G(\gamma(b)) - G(\gamma(a))}$$

  donde ∇G, es el campo vectorial que a cada punto $x \,\epsilon\, U$, le asocia el vector gradiente de G en el punto x. En particular, si γ es cerrada $\oint_\gamma \nabla G \cdot ds = 0$

  Lema de Schwarz : *(Condición necesaria para que F admita un potencial) Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $G : U \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ con $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos con $\gamma * \subseteq U$. Entonces F de clase $\mathcal{C}^1$ admite un potencial si se verifica la siguiente condición*

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall x \epsilon U, \quad \forall i,j = 1,2,\ldots,n$$

Aunque esta condición no es, en general suficiente, por lo que lo solucionaremos con el siguiente teorema.

$\boxed{\textbf{Teorema :}}$ *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ y $F : U \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase $\mathcal{C}^1$ entonces F es conservativo si, y sólo si,*

$$\boxed{\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall x \epsilon U, \quad \forall i,j = 1,2,\ldots,n}$$

- **Interpretaciones de la integral curvilínea**
  - **Trabajo a lo largo de una cruva** $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

    Sea $\gamma(t)$ una curva de $\mathcal{C}^1$, con $\gamma* \subseteq A$, donde $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$, se demuestra que el trabajo realizado W_{pq} se obtiene como la integral siguiente

    $$W_{pq} \equiv \int_\gamma F \cdot ds = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

  - $\boxed{\textbf{Teorema de Green :}}$

    Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $F : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $A \subseteq U$ una región compacta. Entonces:

    $$\boxed{\int_{\partial A^+} F \cdot ds \equiv \int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) d(x,y)}$$

    El teorema de *Green* nos permite calcular integrales de línea en $\mathbb{R}^{n=2}$ mediante el calculo de una integral doble o viceversa, algunos de sus usos son la **Integral de línea en el caso de n=2**:

    - Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (3x^2y, -x^3)$ y A la región de $\mathbb{R}^2$ definida por

      $$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqq y \leqq 1\right\}$$

      Calcúlese $\int_{\partial A^+} FdS$ ... lo que es inmediato. ($x \in [0, +\sqrt{y}], y \in [0,1]$)
    - Calcúlese el área de la región $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$ Para resolverlo aplicaremos el teorema de Green, por lo que basta con escoger un campo F definido en un abierto que contenga a S y sea tal que:

      $$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1$$

      Además, si tenemos en cuenta que la curba definida en el recinto A es una elipse, de la que sabemos su parametrización, podemos escribir que $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = (acos(t), bsen(t))$ y el campo definido por $F(x,y) = (y, 2x)$. Con γ curva derrada simple y A la región determinada por el interior de γ .

- **Rotación de un campo vectoral en $\mathbb{R}^2$:**

  Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ $\quad F : U \to \mathbb{R}^2$ un campo continuo y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada sumple de calse $\mathcal{C}^1$, tal que $\gamma* \subseteq U$.

  Se llama ***Circulación del campo F alrededor de*** γ ***a***

$$\boxed{C \equiv \oint_{\gamma^+} F \cdot ds}$$

  Sea A la región interior de γ Se llama ***rotación del campo F alrededor de*** γ ***a***

$$\boxed{RotF(\gamma) \equiv \frac{1}{\text{"}Area(S)\text{"}} \oint_{\gamma^+} F \cdot ds = \frac{C}{\text{"}Area(S)\text{"}}} \quad o \quad \boxed{RotF(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in U}$$

  * Definido mas extensamente en la sección 1.2.

  - Se dice que un campo es *irrotacional* en U si su rotacional es $\mathbf{0}$, $\quad \forall (x, y) \in U$. Además si es irrotacional, la circulacion del campo a traves de cualquier curva contenida en U es cero.

  - **La interpretación Física** de la rotación (que no es más que su base histórica) es:

$$\int_{\partial A^+} F \cdot ds = \int_{\partial A^+} F \cdot T ds \quad donde \quad T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$$

  - Además conviene saber que una línea de flujo para un campo vectorial F es una curva $\sigma(t)$ tal que, para cada t, $F(\sigma(t)) = \sigma'(t)$

- **Teorema de la divergencia:**
  Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\quad F : U \to \mathbb{R}^n$ un campo diferenciable y $P \in U$. Se llama **divergencia de** F **en** p **a**

$$\boxed{DivF(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(P)}$$

  El siguiente teorema premite además ver, que la divergencia de un campo F en un punto p es un escalar de $\mathbb{R}^2$ y que representa una medida del flujo del campo por unidad de área en cada punto p de U.

- **Teorema** (*De la divergencia en el plano*)
  Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^1$ y $A \subseteq U$ una región compacta de $\mathbb{R}^2$, tal que ∂A^+sea la imagen de una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regular a trozos. Sea G=$(-F_2, F_1)$entonces

$$\boxed{\int_{\partial A^+} G \cdot ds = \int_A DivF d(x, y)}$$

3.4. Integrales de Superficie

3.4.1. Parametrización de superficies en $\mathbb{R}^3$

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo definido en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Recordemos que se llama **superficie determinada por** f al conjunto S,

$$S = \{(x, y, z) \in U; f(x, y, z) = 0\}$$

Nuestro objetivo es considerar las posibles reprsentaciones paramétricas de una superfice.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2, g : A \to \mathbb{R}^3$ tales que $S = g(A)$. El campo vectorial g se dice que es una **parametrización de la superficie** S. De hecho, las coordenadas de los puntos de S las representaremos como,

$$x = g_1(u,v), \quad y = g_2(u,v), \quad z = g_3(u,v)$$

Si g es de clase $\mathcal{C}^1$,g/A inyectiva y el rango del $J_g(u,v) = 2, \forall (u,v) \in A$ diremos que S es una **superficie simple**. Si, para cada punto $Q \in S$, existe un entorno de V tal que $S \bigcap V$ es una superficie simple, se dice que S es **localmente simple**.

En tal caso existe un conjunto A_0 de R^2 y una función $g_0 : A_0 \to \mathbb{R}^3$ tal que $V \bigcap S = g_0(A_0)$ y se dice que g_0 es una **parametrización local de** S.

Sea $S = g(A)$ una superficie simple, entonces llamamos:

- **Borde de** S,∂S, a $\partial S \equiv g(Fr(A)) = g(\partial A)$
- **Interior de** S, $Int(S) \equiv g(int(A))$
- **Algunos ejemplos son:**
  - La *Parametrización trivial* a S dada por

    $$S = \{(x,y,z) \in U; (x,y) \in A, z = h(x,y)\}$$

    es $g(x,y) = (x,y,f(x,y))$.
  - Sea U un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $h : U \to \mathbb{R}$, una función de clase $\mathcal{C}^1$ y sin puntos críticos; entonces, si $c \in \mathbb{R}$ entonces a la superficie,

    $$S = \{(x,y,z) \in U : h(x,y,z) = c\}$$

    de le denomina **superficie de nivel de valor** c, se puede probar que S es una superficie de nivel si, y solo si, S es una superficie localmente simple.

  - Así por ejemplo, son superficies localmente simples:
    - Los cilindros y se puden defninir, como los campos vectoriales siguientes:

      $$g_1, g_2 : [0,r] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 g_1(x,y) = (\sqrt{r^2 - y^2}, y, z) \quad y \quad g_2(x,y) = (-\sqrt{r^2 - y^2}, y, z))$$
    - Las esferas, se pueden definir como los campos vectoriales siguientes:

      $$g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}^3 \qquad A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

      $$g_1(x,y) = (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \quad ; \quad g_2(x,y) = (x, y, -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$$

      son dos parametrizaciones locales de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($z \geq 0$ y $z \leq 0$ respectivamente)
    - El elipsoide es una seuperficie localmente simple. Los campos vectoriales

      $$g_1, g_2 : E \to \mathbb{R}^3$$
      $$g_1(x,y) = (x, y, c\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}) \quad ; \quad g_2(x,y) = (x, y, -c\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2})$$

      donde E es la elpise de semiejes a y b y las dos parametrizaciones locales son del elipsoide de semiejes a, b y c ($z \geq 0$ y $z \leq 0$ respectivamente)
    - Igualmente ocurre con el cono. Sea $A =]0, 2\pi[\times \mathbb{R}^+$. Los campos vectoriales

      $$g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}^3$$

      $$g_1(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad ; \quad g_2(x,y) = (x, y, -\sqrt{x^2 + y^2})$$

3.4.2. Espacio tangente y Plano tangente

Se dice que un vector $u \in \mathbb{R}^3$ es un **vector tantgente** a las superficie S, si existe una curva contenida en S que pasa por el punto Q y que tiene tangente en dicho punto, esto es, existe $\gamma : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^3$ continua tal que $\gamma* \subseteq S$ con $\gamma(0) = Q$ y $\gamma'(0) = u$. Se define el **espacio tangente a S en Q, $T_Q(S)$**, como el subespacio vectorial generado por los vectores

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(P) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}(P), \frac{\partial g_3}{\partial u}(P), \frac{\partial g_3}{\partial u}(P)\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial v}(P) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial v}(P), \frac{\partial g_3}{\partial v}(P), \frac{\partial g_3}{\partial v}(P)\right)}$$

Análogamente se define el **espacio tangente a S en el punto** Q $Q = g(P)$ como el plano π, que pasa por el punto Q y cuyos vectores directores son $\frac{\partial g}{\partial u}(P)$ y $\frac{\partial g}{\partial v}(P)$ esto es, $\pi \equiv Q + T_Q(S)$

3.4.3. Orientacion de una superficie

Proposición : *Toda superficie simple es orientable*

Si S es una superficie orientable, el campo N (campo de vectores unitarios $N(Q)$ con $Q \in S$ normales a la superficie S) le asigan a S una **orientación**. Así, la superficie S junto con el campo N determinan una **superficie orientada**.

- **Un vector normal a la superficie se define como**:
  Si $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S, se llama **vector normal a S en el punto Q a**

$$\boxed{N_g(P) \equiv \frac{\partial g}{\partial u}(P) \times \frac{\partial g}{\partial v}(P)}$$

Es claro además que $N_g(P)$ es un vector ortogonal al plano tangente a S en $Q = g(P)$. Así pues, en el caso de una superficie simple, podemos considerar el siguiente campo de vectores normales a $S, N : S \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$N(Q) = N(g(u,v)) \equiv \frac{N_g(u,v)}{||N_g(u,v)||}$$

Así la parametrización de g determina una orientación en la superficie $S = g(A)$

3.4.4. Área de una superfice

Sea $S = g(A)$ una superficie simple en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por la función $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Se define como el **área de** S, $Ar(S)$, la siguiente expresión:

$$\boxed{Ar(S) \equiv \int_A ||N_g(u,v)||d(u,v)}$$

Como era de esperar, el área de una superficie no depende de la prametrización de S. En el caso particular en que S sea la gráfica de una función $h : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, es fácil de ver que el vector

$$N_g(u,v) = \left(-\frac{\partial h}{\partial v}(u,v), \frac{\partial h}{\partial u}(u,v), 1\right)$$

y por tanto,

$$Ar(S) = \int_A \sqrt{\left(-\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\right)^2 + 1} \quad d(u,v)$$

3.4.5. Integrales de superficie de campos escalares

Sea $S = g(A)$ una superficie simple de $\mathbb{R}^3$, parametrizada por la función $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(basta que g sea de $\mathcal{C}^1$, inyectiva y rango $[J_g(u, v)] = 2$, salvo en un conjunto de mediada nula) y $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Se define la **integral de superficie del campo f sobre S**,

$$\boxed{\int_A f dS \equiv \int_A f(g(u,v))||N_g(u,v)||d(u,v)}$$

En particular,

$$Ar(S) \equiv \int_A 1dS$$

Sea S una superficie simple y $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Se define el **valor medio de f sobre S** como:

$$\overline{f_S} \equiv \frac{\int_S f dS}{Ar(S)}$$

Además, si la superficie S es la unión finita de superficies simples $= \bigcup S_i$, cuyas intersecciones sean de media cero (esfera, troco de cono, ortoedro, etc.) entonces podemos definir

$$\int_S f dS = \sum_i \int_{S_i} f dS$$

3.4.6. Integrales de superficie de un campo vectorial

Supongamos que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo continuo, sean $S = g(A)$ una superficie simple de $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,(basta que g sea de $\mathcal{C}^1$, inyectiva y el rango del jacobiano sea igual a 2, salvo en un conjunto de medida nula), U un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a S y $F : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Se define la **integral de superficie de F sobre S**, llamada **flujo de F a través de S** como

$$\boxed{\int_{S_g} F \cdot dS = \int_A \langle F(g(u,v)), N_g(u,v)\rangle}$$

Donde ya sabemos que $N_g(u, v)$ no es otra cosa que $N_g(u, v) = \frac{N_g(u,v)}{||N_g(u,v)||}$ y por lo tanto tenemos que $F \cdot N = \langle F(g(u, v)), N(g(u, v))\rangle = \langle F(g(u, v)), N_g(u, v)\rangle||N_g(u, v)||$ o lo que es lo mismo

$$\int_{S_g} F \cdot dS \equiv \int_S F \cdot NdS$$

3.5. Teorema de Stokes y de la divergencia(en $\mathbb{R}^3$)

3.5.1. Teorema de Stokes

- **Teorema de Stokes:** *Sean S una superficie simple y $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^2$ una parametrización que determina una orientación en S, U un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a S y $F : U \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces:*

$$\boxed{\int_{\partial S^+} F \cdot dS \equiv \int_S RotF \cdot dS}$$

Si S no tiene frontera, como es el caso de la esfera, entonces la integral de la derecha es cero. Por otra parte, en terminos de operadores tenemos que $\mathbf{RotF} \equiv \nabla \times \mathbf{F}$, por lo tanto la tesis del teorema de Stokes, queda:

$$\boxed{\int_{\partial S^+} F \cdot dS \equiv \int_S \nabla \times F \cdot dS}$$

3.5.2. Teorema de la divergencia

Como ya sabemos, diremos que la superficie está **orientada positivamente** si,acada $Q \in S$ le asocia un vector normal que apunta hacia el exterior del dominio.

Recordemos que si U es un abierto, el teorema de la divergencia va a relacionar, para campos en $\mathbb{R}^3$, la integral de un campo F sobre un dterminado tipo de superficie S con la integral triple de la divergencia de F sobre un dominio D determinado por S.

Teorema de Gauss (*O de la divergencia en el espacio*)
Sea D un dominio regular, S la frontera de dicho dominio regular, superficie orientada positivamente. Entonces, si U es un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a D y a S y $F : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, se tiene

$$\boxed{\int_S F \cdot dS \equiv \int_D \nabla \cdot F \cdot dV}$$

Este teorema nos permite calcular el flujo de un campo a través de una superficie, **sin conocer su parametrizacíon concreta**, ya que según el teorema, calculando la integral triple ($dV \equiv d(x, y, z)$), el resultado será siempre el flujo que traviesa la superficie hacia el exterior.