Resolución de la sucesión de Fibonacci mediante los métodos matemáticos de la mecánica cuántica

pod

16 de agosto de 2003

Resumen

En el presente artículo damos una resolución alternativa a la sucesión de Fibonacci utilizando los métodos operacionales que se utilizan, entre otras partes de la física, en la mecánica cuántica. La solución que se presenta es mucho más sencilla conceptual y mecánicamente que la más habitual, basada en explotar la relación de recurrencia q ue define la sucesión de Fibonacci.

Para acabar, utilizaremos la solución encontrada para demostrar explícitamente algunas de las propiedades más conocidas de la sucesión de Fibonacci, en espacial su relación existente con la razón áurea.

Las técnicas utilizadas en este artículo no precisan de conocimientos reales sobre los detalles matemáticos o fenomenológicos de la mecánica cuántica, ya que las técnicas utilizadas en ésta que se utilizan en el presente artículo son más generales y se estudian en los primeros cursos de las diferentes licenciaturas con contenido matemático medio.

Por este motivo, el presente artículo debería poder ser seguido por cualquier estudiante de primer curso de las licenciaturas de física y de matemáticas, o de segundo ciclo de carreras técnicas, sin gran dificultad. Las técnicas matemáticas utilizadas en la segunda mitad del artículo son muy frecuentes y útiles en estas carreras, por lo que la lectura detallada puede resultar instructiva.

Incluso los estudiantes de bachiller deberían comprender gran parte del documento, dejando a parte detalles matemáticos algo más adelantados.

1. Introducción

Una sucesión es una aplicación entre el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, y los números reales $\mathbb{R}$. Dicho de otra forma, una sucesión es una colección ordenada de números reales, $\{a_n\}$ con $n = 1, 2, 3 \ldots$.

La forma más simple de caracterizar una sucesión de números es enumerar uno a uno todos sus elementos, por ejemplo en forma de tabla, sin embargo este procedimiento es inviable ya que nos haría falta especificar enteramente infinitos números. La formas más usuales consisten en proporcionar una regla que nos permita calcular cada nuevo término.

El método más completo consiste en dar el *término general*, es decir, proporcionar una fórmula matemática que nos permita obtener el valor del término n-ésimo sin necesidad de conocer ninguna información más. Un ejemplo de ésto es la sucesión de los números pares, $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, que se puede caracterizar según su término general,

$$a_n = 2\,n \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots \ . \tag{1}$$

No siempre es posible encontrar el termino general de una sucesión, a veces puede ser muy complicado. Si conseguimos encontrar el término general de una sucesión, decimos que la hemos resuelto.

En algunos casos, es más cómodo dar una regla que nos permita encontrar el valor del término n-ésimo a partir de los términos anteriores, lo que llamamos *relación de recurrencia*. Por ejemplo, podemos definir la sucesión de los números pares mediante la relación de recurrencia

$$a_{n+1} = a_n + 2 \ , \tag{2}$$

este método nos obliga a dar información adicional sobre los primeros términos de la sucesión. En este ejemplo, nos es suficiente con especificar $a_1 = 2$.

La *sucesión de Fibonacci* es aquella en que cada término es la suma aritmética de los dos anteriores, es decir, viene definida por la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ , \tag{3}$$

donde tenemos que especificar los valores de a_1 y a_2. La elección histórica más habitual es $a_1 = a_2 = 1$, con lo que los primeros términos son

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots\} \ .$$

Otra elección de los primeros términos conducirá, naturalmente, a una sucesión de Fibonacci diferente.

Uno de los hechos más conocidos de la sucesión de Fibonacci es que el cociente de dos de sus términos consecutivos tiende al número áureo, $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a medida que n crece, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ . \tag{4}$$

Además, la convergencia a este límite es alternada, es decir, si un término de acerca al límite por arriba, el siguiente se acercará por debajo, y viceversa.

La sucesión de Fibonacci aparece en diversos fenómenos naturales, como son la reproducción de los conejos [1], la distribución de escamas de una piña [2], en el estudio de las leyes mendelianas de la herencia, etc.

2. Métodos operacionales de la mecánica cuántica

El concepto matemático de operador es de aplicación en prácticamente todas las ramas de la matemática y la física, siendo la mecánica cuántica la rama de la física donde más importancia intrínseca adoptan.

En general, un operador es un objeto matemático que actúa sobre otros objetos matemáticos de cierto tipo, transformandolos en otro objeto —en general, diferente— de ese mismo tipo. Las funciones de una variable pueden ser consideradas como operadores, f, que actúan sobre un número real, x, para dar otro número real, $f(x)$. Otro ejemplo común en la física y en la tecnología son las transformadas integrales, como la de Fourrier, $\mathcal{F}$ o la de Laplace, $\mathcal{L}$, que transforman una función $f(x)$ en otra función diferente, $\mathcal{L}[f](s)$ (en el caso de Laplace).

En mecánica cuántica, los operadores se aplican sobre los elementos, *kets*, de un espacio vectorial de Hilbert, que suelen se suelen indicar de la forma $|a\rangle$. Estos kets contienen toda la información física posible sobre el estado del sistema, incluyendo la denominada función de onda.Un operador $\hat{H}$ transforma un estado o ket en otro diferente,

$$\hat{H} \, |a\rangle = |b\rangle \ . \tag{5}$$

Esto se aprovecha en mecánica cuántica para definir operadores que implementen las diferentes acciones que se pueden efectuar sobre un sistema físico, como puede ser medir algunas de sus características, realizar transformaciones de simetría, etc.

3. Métodos operacionales y la sucesión de Fibonacci

Siguiendo la filosofía de la utilización de operadores que hemos visto en el apartado anterior, vamos intentar hallar el término general de la sucesión de Fibonacci utilizando para ello los conceptos de los métodos operacionales.

Definimos el *operador siguiente*, $\hat{S}$, que aplicado al término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci nos envuelve el siguiente,

$$\hat{S} a_n = a_{n+1} \ . \tag{6}$$

Mediante este operador, podemos encontrar el término n-ésimo de la sucesión mediante la aplicación reiterada,

$$a_n = \hat{S}^n a_1 \ , \tag{7}$$

por tanto, caracterizando el operador $\hat{S}$ tenemos definido el término general de la sucesión.

Para encontrar la solución al término general de la sucesión de Fibonacci reescribiremos la relación de recurrencia que define la sucesión, ecuación (3), en el lenguaje del operador $\hat{S}$,

$$\hat{S}^2 a_n = \hat{S} a_n + a_n \ , \tag{8}$$

o bien, reordenando términos y sacando factor común tenemos

$$\left(\hat{S}^2 - \hat{S} - 1\right) a_n = 0 \ , \tag{9}$$

o lo que es lo mismo

$$\left(\hat{S} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\hat{S} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) a_n = 0 \ , \tag{10}$$

vemos como, por primera vez, aparece de forma natural el número áureo. Por lo tanto, tenemos dos posibles soluciones posibles para el operador $\hat{S}$,

$$\hat{S}_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ , \tag{11}$$

que, aplicadas a la expresión del termino general, ec. (7), tenemos

$$a_n^{(\pm)} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n . \tag{12}$$

Dado que tenemos dos soluciones posibles, la solución más general será una combinación lineal de las dos posibilidades,

$$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n . \tag{13}$$

Las constantes A y B pueden fijarse fijando los valores de a_1 y a_2, cosa que nos proporciona un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que puede escribirse en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix} \ , \tag{14}$$

i, naturalmente, la solución se puede encontrar invirtiendo la matriz

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5+3\sqrt{5} & 5-\sqrt{5} \\ -5-3\sqrt{5} & 5+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} . \tag{15}$$

En el caso más habitual, $a_1 = a_2 = 1$, la solución a este sistema de ecuaciones es

$$A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}} \ , \tag{16}$$

con lo que la solución final al término general de la ecuación de Fibonacci para este caso más particular se escribe de la forma

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] . \tag{17}$$

Podemos simplificar esta última ecuación mediante el desarrollo del binomio de Newton,[1]

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n = \sum_{m=0}^{n} (\pm 1)^m \binom{n}{m} 5^{m/2} . \tag{18}$$

[1]En general, el teorema del binomio de Newton se escribe de la forma

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m b^{n-m} \ \text{, donde } \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} .$$

Substituyendo directamente, obtenemos

$$a_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{m} \binom{n}{m} \Big(1 - (-1)^m\Big) 5^{m/2} \ , \tag{19}$$

por tanto, tan sólo contribuyen los términos con m impar, cosa que nos propone realizar un cambio de índice $k = (m-1)/2$

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} 5^k \ , \tag{20}$$

donde $[x] := \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \,|\, x > n\}$ indica la parte entera del real x, es decir, el máximo número entero n tal que es menor que x.[2]

Para comprobar la validez de la fórmula general, ec. (13), podemos utilizar los resultados obtenidos para calcular otra sucesión de Fibonacci, por ejemplo la $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$, el resultado obtenido es

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n . \tag{21}$$

En la ecuación anterior no es evidente que a_n sea un número entero, para comprobarlo podemos realizar una expansión de los binomios de igual forma al caso anterior. Esta vez, tanto los términos con m par como impar contribuyen, y su contribución puede agruparse en sendos sumatorios de la forma,

$$a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} 5^k + \frac{1}{10 \cdot 2^{n-1}} \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \binom{n}{2k-1} 5^k \ , \tag{22}$$

4. El número de oro

Tal y como hemos dicho anteriormente, el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci tiende al número de oro, de forma alternada. En esta sección veremos que, una vez encontrada la fórmula general ec. (13), demostrar esta afirmación es trivial, y la demostración es válida para cualquier sucesión del tipo de Fibonacci.

[2]La definición dada es válida para $x > 0$, para $x < 0$ podemos tomar $[x] := -[-x]$.

Podemos expresar lo dicho de forma matemica definiendo una nueva sucesión, b_n, como el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, es decir,

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \ . \tag{23}$$

El límite de esta nueva sucesión, para n tendiendo a infinito, será el número áureo tal y como hemos mencionado anteriormente,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ . \tag{24}$$

Teniendo en cuenta la expresión general de a_n, para cualquier sucesión de Fibonacci, ec. (13), podemos expresar el término general de b_n de forma trivial,

$$b_n = \frac{A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \ . \tag{25}$$

Dado que $(1-\sqrt{5})/2 = -0{,}618$ es —en valor absoluto— menor que la unidad, el término que lo contiene tendirá muy rápidamente a cero a medida que el valor de n crece. Por lo tanto, en el límite $n \to \infty$ podemos ignorar todos los términos que contienen esta cantidad. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ , \tag{26}$$

tal y como esperábamos.

Más sutil es demostrar que la convergencia al número de oro es alternada, es decir, que si b_n es mayor que el número de oro, tanto b_{n+1} como b_{n-1} son menores, y viceversa.

Para realizar esta demostración debemos calcular el término subdominante de este límite. Será útil tener en cuenta que, para valores de x pequeños en comparación con la unidad, se tiene la aproximación

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \ , \tag{27}$$

donde se ignoran términos de orden x^2.

Para simplificar la notación, definimos $\emptyset_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Aplicando el desarrollo anterior a la ecuación (26) tenemos, para n altas,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{A\emptyset_-^{n+1} + B\emptyset_+^{n+1}}{A\emptyset_-^{n} + B\emptyset_+^{n}} && (28)\\
&= \frac{\emptyset_+^{n+1}\left[1 + \frac{A}{B}\left(\frac{\emptyset_-}{\emptyset_+}\right)^{n+1}\right]}{\emptyset_+^{n}\left[1 + \frac{A}{B}\left(\frac{\emptyset_-}{\emptyset_+}\right)^{n}\right]} && (29)\\
&\approx \emptyset_+\left[1 + \frac{A}{B}\left(\frac{\emptyset_-}{\emptyset_+}\right)^{n+1}\right]\left[1 - \frac{A}{B}\left(\frac{\emptyset_-}{\emptyset_+}\right)^{n}\right] && (30)\\
&\approx \emptyset_+\left[1 + \frac{A}{B}\left(\frac{\emptyset_-}{\emptyset_+}\right)^{n+1} - \frac{A}{B}\left(\frac{\emptyset_-}{\emptyset_+}\right)^{n} + \cdots\right] && (31)\\
&= \emptyset_+\left[1 - \frac{A}{B}\left(\frac{\emptyset_-}{\emptyset_+}\right)^{n}\left\{1 - \frac{\emptyset_-}{\emptyset_+}\right\} + \cdots\right] && (32)
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos despreciado el término cruzado, ya que sería un infinitesimal de orden superior. Dado que el cociente $\emptyset_-/\emptyset_+$ es negativo, el término entre llaves es positivo y el termino subdominante es proporciona a la n-ésima potencia de una cantidad negativa, es decir, teniendo en cuenta el signo negativo, será negativo para n par y positivo para n impar, y por lo tanto la convergencia es alternada. Esto completa la demostración.

5. Conclusiones

En este artículo hemos visto como los métodos operacionales usados, entre otras ramas de la física, por la mecánica cuántica, resultan de gran utilidad en un problema que, aparentemente, no tiene ninguna relación con ello. Estos métodos nos han permitido obtener la fórmula del término general de cualquier sucesión de Fibonacci, donde podemos escoger los dos términos de la sucesión.

Además, hemos comprovado que las relaciones existentes entre la sucesión de Fibonacci y el número de oro se pueden comprobar trivialmente a partir de la fórmula general obtenida.

Referencias

[1] El número de oro. (página web) Dirección url: http://centros5.pntic.mec.es/cpr.de.aranjuez /foro/circo/fibonac.htm.

[2] Sucesión de Fibonacci y la razón áurea. (página web) Dirección url: http://www.geocities.com/Athens/Acropolis/4329/fibo_au.htm

[3] La sucesión de Fibonacci. (página web) Dirección url: http://www.geocities.com/Athens/Acropolis/4329 /fibonac.htm