

Tratamiento y propagación de errores

Barbol

Diciembre 2003

1. Tratamiento de errores

En física se estudian diferentes modelos matemáticos que intentan explicar de modo aproximado cómo se comporta la naturaleza e intentar predecir las consecuencias en determinados experimentos. Si el modelo no falla en sus predicciones se va consolidando poco a poco en la teoría física. Sin embargo, desde el momento en el que falla se debe abandonar o, como mucho, limitar su aplicabilidad.

Sin embargo también pueden ser los experimentos los que fallen. No quiero decir, por supuesto, que la naturaleza se confunda y en vez de haber gravedad atractiva veamos como, al soltar una bolita, ésta escapa de la Tierra¹. Me refiero a que, cuando tomamos datos en un experimento, estos datos presentan cierta incertidumbre.

Cuando medimos una distancia con una regla milimetrada puede ocurrir que la distancia esté justo entre dos marcas del milímetro. Si medimos un voltaje con un polímetro podemos ver que este oscile entre dos valores. Por tanto, cada medida viene con un error intrínseco que en general se escribe como

$$x \pm \delta x .$$

Estos errores se tienen que tratar a la hora de realizar los informes de los experimentos y propagarlos a las cantidades que querramos determinar a partir de ellos. Por ejemplo, con una regla y un cronómetro podemos medir la distancia que recorrió un objeto y el tiempo que tardó, pero no medimos directamente su velocidad, por lo que el error en la velocidad vendrá dada a partir del error en la distancia y el error en el tiempo.

1.1. Tipos de errores

Básicamente hay tres tipos de errores diferentes:

- **Sistemáticos:** Estos errores vienen, como su nombre indica, por sistema. Puede que empleemos una regla mal graduada en que cada centímetro mida en realidad 13 milímetros, o puede que nos hayamos olvidado de sumar el diámetro de una bola a la hora de marcar la distancia entre la bola y un punto. Estos errores hay que intentar evitarlos y, en caso de cometerlos, darse cuenta a tiempo. Generalmente el valor verdadero de la magnitud a medir no se encuentra en la región de los datos tomados.
- **Estadísticos:** Estos errores vienen dados por motivos muy diversos. En este caso el valor verdadero de la magnitud a medir está en la región de los datos tomados.
- **Incertidumbres:** Estos errores son causados por la precisión del aparato que empleamos para medir, que puede ser menor o igual a las fluctuaciones estadísticas de la medida.

1.2. Cifras significativas. Notación científica

Las cifras significativas son aquellas que aportan información útil en un número. Las cifras no significativas son las que aparecen como resultados del cálculo. Se consideran cifras significativas aquellas que tienen igual o mayor peso que el error de un número. Por ejemplo, si tenemos la magnitud

¹El día que veamos esto tendremos que dejar la carrera

$T = 296,346724 \pm 0,1K$ las cifras a partir de la centésima de kelvin (incluida ésta) no aportan nada nuevo, pues son de mucha menor magnitud que el error y entran dentro de las fluctuaciones. También se considera que los ceros no son cifras significativas, excepto cuando estén entre dos cifras distintas de cero. Por ejemplo 110 tiene dos cifras significativas, 0,0001 tiene una cifra significativa, pero 102 tiene tres.

Esto se suele resolver empleando notación científica. En estos tres últimos casos, en notación científica escribimos $1,1 \cdot 10^2$, $1 \cdot 10^{-4}$ y $1,02 \cdot 10^2$. Como vemos el número de cifras significativas en notación científica es trivial.

Hay que hacer notar que la medida se tiene que dar hasta el peso del error. Supongamos que tenemos una medida $d = 30cm$ con un error de un milímetro, en ese caso se debe escribir $d = 30,0 \pm 0,1cm$.

1.3. Redondeo de números

Por tanto, cuando tenemos cifras no significativas hay que eliminarlas, pero no simplemente borrarlas, sino redondeando. Es obvio que si tenemos que redondear 3,294438 a la primera cifra decimal es mucho más correcto escribir 3,3 que 3,2. Generalmente se dan las siguientes reglas de redondeo:

- Si la cifra que se omite es menor que 5, la eliminación se realiza sin más.
- Si la cifra que se omite es mayor que 5, se aumenta en una unidad la última cifra que se conserva.
- Si la cifra que se omite es 5 se elimina si la última cifra retenida es par y se suma uno a la última cifra retenida si es impar

Por supuesto, en el último punto también existe el convenio contrario. Estadísticamente son equivalentes.

1.4. Especificación de incertidumbres

Ya hemos visto que, en general, el error de un número se escribe como $x \pm \delta x$, con $\delta x > 0$. Se considera que el valor verdadero de la magnitud debería estar entre $x - \delta x$ y $x + \delta x$.

Si lo que queremos es comparar dos medidas con errores diferentes para ver cuál es más precisa usamos el error relativo, que es el cociente entre el error y la medida, de modo que cuanto menor sea este error relativo más precisa será la medida. Para dar el error en porcentaje de la medida no hay más que multiplicar el error relativo por cien.

2. Asignación del error

Ahora lo que hay que saber es cómo se asigna un error, caben dos posibilidades, que las medidas sean directas (como medir distancias con una regla o el tiempo con un cronómetro) o, por el contrario, indirectas (como medir la resistencia que presenta un circuito y calcular la intensidad de la corriente).

2.0.1. Medidas directas

Cuando las medidas son directas vuelve a haber dos posibilidades, que se halla realizado una sola medida o que se hayan realizado varias.

Si se realiza una sola medida el error que se asigna es la sensibilidad del objeto que se use para medir (si es una regla graduada en milímetros el error será de un milímetro), o bien un error tal que recoja las fluctuaciones del objeto con la que se está midiendo.

Si se realizan n medidas se empleará como valor real la media aritmética de todas ellas:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} .$$

Y para el error se empleará la desviación típica del valor medio:

$$s(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}} .$$

2.0.2. Medidas indirectas

Para calcular medidas indirectas que son función de otras ($z = f(x, y)$) se actuará de la siguiente manera.

El valor de la medida no será otro que la solución a la función, y el valor del error se calculará según las siguientes expresiones:

Si las variables fueron medidas una sola vez:

$$\delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta y .$$

Y si las variables fueron medidas varias veces:

$$s^2(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 s^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 s^2(y) .$$

2.0.3. Medias ponderadas

Cuando tenemos varias medias de un mismo valor con sus respectivos errores podemos calcular un valor con su error de manera que tengan más peso los valores más precisos mediante la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\frac{x_1}{S_1^2} + \frac{x_2}{S_2^2} + \dots + \frac{x_n}{S_n^2}}{\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2} + \dots + \frac{1}{S_n^2}} .$$

Y su error vendrá dado por:

$$S(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2} + \dots + \frac{1}{S_n^2}}} .$$

3. Ajuste a una recta

En ocasiones queremos representar los datos que tenemos y hallar la función que describe su comportamiento. Cuando esta función es una recta de la forma $y = ax + b$ se emplea el Método de los Mínimos Cuadrados, que nos da el valor de los coeficientes a y b con su error, de este modo:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} , \tag{1}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} . \tag{2}$$

Para medir la calidad de este ajuste, es decir, si los datos están más o menos cerca de los valores teóricos que nos da la recta calculada, se emplea el coeficiente de correlación, que está acotado entre -1 y 1 . Este coeficiente es tanto mejor cuanto más se acerque a alguno de estos valores y peor cuanto más se acerque a cero. La fórmula de coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}} .$$