

# Fundamentos de astronomía

Pasado por: Javier Tarrío

4 de febrero de 2010

## Índice

<b>1. Trigonometría esférica</b>	<b>4</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	4
1.2. Triángulo esférico . . . . .	4
1.2.1. Triángulo polar . . . . .	5
1.2.2. Relaciones en un triángulo esférico . . . . .	5
1.3. Fórmulas fundamentales de primer orden de la trigonometría esférica . . . . .	6
1.3.1. Fórmulas de Bessel . . . . .	6
1.3.2. Fórmulas de Bessel para el triángulo polar . . . . .	7
1.3.3. Fórmula de la cotangente . . . . .	7
1.3.4. Fórmula de Cagnoli . . . . .	7
1.4. Fórmulas fundamentales de segundo orden de la trigonometría esférica . . . . .	8
1.4.1. Fórmulas de Borda . . . . .	8
1.4.2. Analogías de Delambre . . . . .	8
1.4.3. Analogías de Neper . . . . .	8
1.5. Triángulos esféricos singulares . . . . .	8
1.6. Regla del pentágono de Neper . . . . .	8
1.7. Resolución de triángulos esféricos . . . . .	9
1.8. Fórmulas diferenciales de la trigonometría esférica . . . . .	9
<b>2. Forma y dimensiones de la Tierra. Coordenadas terrestres</b>	<b>11</b>
2.1. El geoide . . . . .	11
2.2. Definiciones . . . . .	12
2.3. Coordenadas . . . . .	12
2.3.1. Coordenadas geográficas . . . . .	12
2.3.2. Coordenadas geocéntricas . . . . .	13
2.3.3. Latitud reducida o excéntrica . . . . .	13
2.4. Relación entre las latitudes . . . . .	13
2.5. Relación entre $\rho$ y las latitudes . . . . .	14
2.6. Correcciones a las coordenadas . . . . .	14
<b>3. Esfera celeste. Movimiento diurno aparente. Rotación de la Tierra</b>	<b>16</b>
3.1. Movimiento diurno aparente . . . . .	16
3.2. La esfera celeste . . . . .	16
3.3. Rotación terrestre . . . . .	17
<b>4. Movimiento orbital de la Tierra</b>	<b>18</b>
4.1. Los planetas . . . . .	18
4.2. Ley de Titius-Bode . . . . .	18
4.3. Movimiento orbital de la Tierra . . . . .	19
4.4. Movimiento aparente del Sol a lo largo de un año . . . . .	20

<b>5. Sistemas de coordenadas astronómicas. Transformaciones de coordenadas</b>	<b>21</b>
5.1. Coordenadas horizontales . . . . .	21
5.2. Coordenadas ecuatoriales horarias . . . . .	22
5.3. Transformación de coordenadas horizontales a ecuatoriales horarias . . . . .	22
5.4. Coordenadas ecuatoriales absolutas . . . . .	23
5.5. Relación entre coordenadas ecuatoriales horarias y absolutas. Tiempo sidéreo . . . . .	24
5.6. Coordenadas eclípticas . . . . .	24
5.7. Transformación de coordenadas ecuatoriales absolutas a eclípticas . . . . .	25
5.8. Coordenadas galácticas . . . . .	26
5.9. Transformación de coordenadas galácticas a ecuatoriales absolutas . . . . .	26
<b>6. Algunos problemas fundamentales en astronomía de posición</b>	<b>28</b>
6.1. Unidades de distancia . . . . .	28
6.1.1. El parsec . . . . .	28
6.2. Medida del tiempo . . . . .	28
6.3. Cuadrantes solares: construcción de relojes de Sol . . . . .	29
6.3.1. Cuadrante ecuatorial . . . . .	29
6.3.2. Cuadrante horizontal . . . . .	30
6.3.3. Cuadrante vertical (muro declinante) . . . . .	30
6.4. Movimiento geocéntrico de los planetas . . . . .	30
<b>A. Transformaciones de coordenadas mediante rotaciones</b>	<b>31</b>
A.1. Coordenadas horizontales y horarias . . . . .	31
A.2. Coordenadas absolutas y eclípticas . . . . .	31
A.3. Coordenadas galácticas y eclípticas . . . . .	32
<b>B. Ecuación del tiempo</b>	<b>33</b>

## Nota

Estos apuntes se basan en las lecciones impartidas en la asignatura *Fundamentos de Astronomía* del año 2003 en la *Facultade de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela*, en base al temario elaborado por el doctor José Ángel Docobo a finales de los años setenta. Con los mismos dió clase en la universidad de Zaragoza y luego, desde el curso 1981-82, en la de Santiago de Compostela. A partir de los años noventa, su discípula y doctoranda Josefina Ling comenzó también a dar clase utilizando en base a dicho material.

En el primer tema (trigonometría esférica) se presenta la trigonometría sobre la superficie de una esfera. Para su desarrollo se presuponen conocimientos básicos en trigonometría plana, cambios en sistemas de coordenadas, cálculo algebraico y cálculo diferencial.

El segundo tema nos acerca a la descripción de la Tierra en cuanto a su forma y las dimensiones de ésta. A continuación se dan los conceptos de coordenadas terrestres para situar los puntos sobre la superficie de la Tierra y poder determinar unívocamente la posición desde las que hacemos las observaciones. No se requiere ningún conocimiento matemático complicado, simplemente trigonometría plana básica.

En los temas tres y cuatro se explican algunas generalidades sobre la Tierra, los planetas y su movimiento de traslación, pero sin entrar mucho en detalles. También se dan definiciones necesarias para el tema cinco, el más importante de este curso (y objetivo del mismo) en el que se enseñan los diferentes tipos de coordenadas estelares y cómo pasar de unos a otros. Para ello se empleará la trigonometría esférica que se aprendió en el primer tema.

Finalmente, en el tema seis se comentan algunos problemas en astronomía de posición, como pueden ser la medida del tiempo o cuando es mejor observar los planetas. Tampoco se entra en detalle en este tema.

Las imágenes del tema cinco están sacadas del libro *Fundamentos de astronomía*, de M. Seeds. Las imágenes del tema dos son retoques hechas por el autor de los apuntes a una imagen sacada de internet, al igual que la imagen del triángulo esférico que aparece en la primera página de los apuntes. El resto son hechas a mano (en realidad sobra este comentario, se nota) por el autor.

# 1. Trigonometría esférica

## 1.1. Definiciones básicas

**Esfera:** el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan una distancia  $r$  (que llamaremos *radio*) de un punto llamado *centro*. Hay que hacer notar que aunque la esfera es un volumen tri-dimensional finito en el espacio euclidiano su superficie es una superficie bidimensional ilimitada. Sobre esta superficie podemos definir una geometría, la cual llamaremos *geometría esférica*, que difiere en varios puntos de la geometría euclidiana.

**Círculo máximo:** es la intersección de un plano que pasa por el centro y la esfera. Este círculo máximo divide a la esfera en dos hemisferios. Cualquier plano que no pase por el centro de la esfera la interseca en un *círculo menor*.

**Polos de un círculo máximo:** (o simplemente **polos**) son los extremos del diámetro de la esfera perpendicular a ese círculo máximo.

Con estas definiciones podemos entonces definir la **distancia esférica** entre dos puntos como la medida sobre el círculo máximo que los une, entendiendo por distancia el arco más corto que los une. Esta distancia se hará en medidas angulares (*i.e.* radianes o grados sexagesimales). Por la propia definición la distancia de un polo a un punto cualquiera de su círculo máximo es siempre igual a un cuadrante ( $90^\circ$ ).

## 1.2. Triángulo esférico

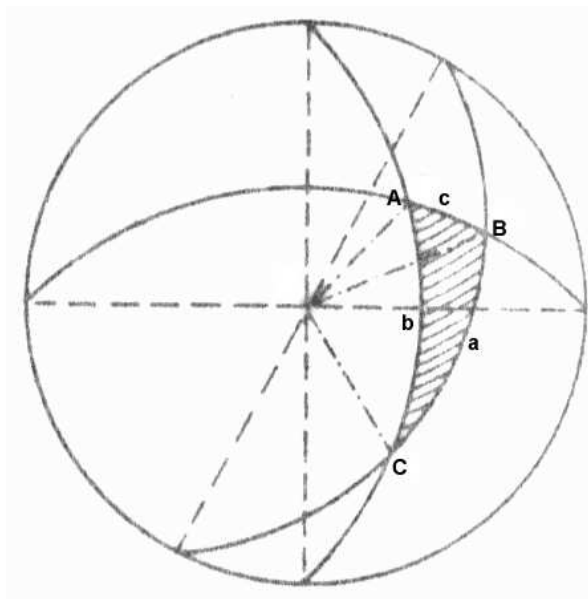


Figura 1: Imagen de un triángulo esférico

El **triángulo esférico** es la porción de superficie esférica limitada por tres círculos máximos, con la condición de que cada uno de los arcos que limita la figura es menor que una semicircunferencia. Los vértices de este triángulo se suelen denotar por letras mayúsculas y sus lados opuestos por la letra minúscula correspondiente.

Los ángulos se definen a partir del diedro definido por los lados y el centro de la esfera, mientras que los lados se corresponden a los ángulos interiores. Tanto ángulos como radios son, por tanto, medidas angulares.

### 1.2.1. Triángulo polar

Dado un triángulo esférico  $ABC$  decimos que  $A'B'C'$  es triángulo polar del primero si cumple:

- Cada vértice de  $A'B'C'$  es polo de su lado correspondiente  $a$ ,  $b$  o  $c$ .
- Los vértices correspondientes de  $ABC$  y  $A'B'C'$  están en el mismo hemisferio.

**Proposición 1** Si  $A'B'C'$  es triángulo polar de  $ABC$ , entonces  $ABC$  es triángulo polar de  $A'B'C'$ .

Para demostrar esto (lo haremos sólo para un ángulo y su lado correspondiente) tenemos que ver que  $A$  es polo de  $a'$  y que  $A$  y  $A'$  están en el mismo hemisferio. La segunda parte es trivial. Para la primera parte demostraremos que  $\overline{AB'} = 90^\circ$  y  $\overline{AC'} = 90^\circ$ .

Como  $B'$  es polo de  $b$  tenemos la distancia  $\overline{AB'} = 90^\circ$  ( $A \in c$ ). Procedemos análogamente para  $C'$ . Por lo tanto  $\overline{AB'} = \overline{AC'} = 90^\circ$  y  $A$  es polo de  $a'$ .

**Proposición 2** Si  $A'B'C'$  es triángulo polar de  $ABC$  entonces:

- Los vértices de uno son suplementarios de los lados del otro ( $A' = 180^\circ - a$ ), ( $A = 180^\circ - a'$ )
- Los lados de uno son suplementarios de los vértices del otro  $a = 180^\circ - A'$ , ( $a' = 180^\circ - A$ )

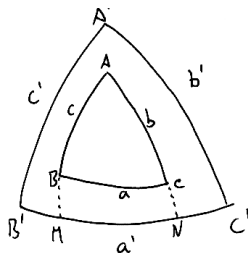


Figura 2: Demostración de la proposición 2

Como  $A$  es polo de  $a'$  y  $c$  y  $b$  son arcos de círculos máximos entonces  $A = \overline{MN}$ . Es obvio además que  $\overline{B'N} = \overline{B'M} + \overline{MN}$  y  $\overline{MC'} = \overline{MN} + \overline{NC'}$ .

Como  $B'$  es polo de  $b$  entonces  $\overline{B'N} = 90^\circ$ . Análogamente  $\overline{MC'} = 90^\circ$ . Sumando las expresiones obtenemos:

$$180^\circ = \underbrace{\overline{B'M} + \overline{MN} + \overline{NC'}}_{a'} + \underbrace{\overline{MN}}_A \rightarrow 180^\circ = a' + A$$

### 1.2.2. Relaciones en un triángulo esférico

**Entre los lados:** El lado de un triángulo esférico es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia ( $b - c < a < b + c$ ).

La suma de los tres lados de un triángulo esférico es siempre menor que cuatro rectos ( $a + b + c < 2\pi$ ).

**Entre los ángulos:** la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis ( $2\frac{\pi}{2} < A + B + C < 6\frac{\pi}{2}$ ).

**Entre ángulos y lados:** Si un triángulo esférico tiene dos lados iguales sus lados opuestos también lo son ( $A = B \Rightarrow a = b$ ).

Si un triángulo esférico tiene dos lados desiguales a mayor ángulo se opone mayor lado ( $A < B \Rightarrow a < b$ ).

### 1.3. Fórmulas fundamentales de primer orden de la trigonometría esférica

Resolver un triángulo esférico es calcular tres elementos del mismo una vez que se conocen los otros tres. Para ello emplearemos las fórmulas fundamentales de la trigonometría esférica. Las de primer orden nos relacionan los ángulos y lados enteros a través de sus funciones trigonométricas. Las de segundo orden relacionan los semielementos de los triángulos esféricos a través de esas mismas funciones.

#### 1.3.1. Fórmulas de Bessel

Para encontrar las relaciones entre lados y ángulos del triángulo esférico partimos de un sistema de coordenadas rectangulares.

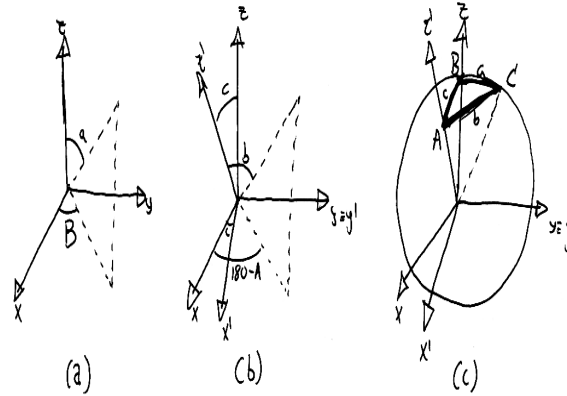


Figura 3: Deducción de las relaciones entre lados y ángulos

El punto  $P$  dista del origen una unidad y tiene coordenadas  $P = (x, y, z)$ . Por inspección de la figura 3(a) vemos que estas coordenadas se pueden expresar mediante:

$$\begin{aligned} x &= \text{sen } a \cos b \\ y &= \text{sen } a \text{sen } b \\ z &= \cos a \end{aligned} \quad (1)$$

Que resulta ser lo mismo que un cambio a coordenadas esféricas.

Si ahora hacemos un giro en torno al eje  $y$  de amplitud  $c$  (figura 3(b)) vemos que el punto  $P = (x', y', z')$  sigue distando una unidad del origen, pero sus coordenadas esféricas son ahora:

$$\begin{aligned} x &= \text{sen } b \cos(180^\circ - A) \\ y &= \text{sen } b \text{sen}(180^\circ - A) \\ z &= \cos b \end{aligned} \quad (2)$$

Pero, como hicimos una rotación en torno a un eje fijo, las expresiones (1) y (2) están relacionadas mediante una matriz de giro:

$$\begin{pmatrix} \text{sen } a \cos b \\ \text{sen } a \text{sen } b \\ \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & 0 & \text{sen } c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } c & 0 & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\text{sen } b \cos A \\ \text{sen } b \text{sen } A \\ \cos b \end{pmatrix} \quad (3)$$

Esta expresión matricial parece darnos las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo esférico, pero esto es cierto siempre y cuando la nomenclatura de los ángulos en las figuras 3(a) y 3(b) sean consecuentes con un triángulo esférico. Se puede ver que esta nomenclatura coincide con la realidad en la figura 3(c). Por tanto, podemos hacer cuentas en esa expresión matricial y encontrar unas fórmulas relacionando ángulos y lados del triángulo esférico:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos A \quad \text{Primera fórmula de Bessel} \quad (4)$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A \quad \text{Segunda fórmula de Bessel} \quad (5)$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad \text{Tercera fórmula de Bessel} \quad (6)$$

Estas tres fórmulas son totalmente generales y se pueden obtener para otros ángulos mediante permutaciones cíclicas de los ángulos.

La primera fórmula de Bessel también recibe el nombre de teorema del coseno. La segunda fórmula de Bessel se conoce como teorema del seno.

### 1.3.2. Fórmulas de Bessel para el triángulo polar

Veamos ahora lo que ocurre cuando aplicamos estas fórmulas al triángulo polar. Si dos triángulos son polares la proposición 2 nos dice que sus ángulos y lados correspondientes son suplementarios, por tanto  $\cos a = \cos(180^\circ - A') = -\cos A'$  y  $\sin a = \sin(180^\circ - A') = \sin A'$ . Análogamente  $\cos A = -\cos a'$  y  $\sin A = \sin a'$ .

Aplicando estas relaciones a la ecuación (4) obtenemos la relación  $-\cos A' = \cos B' \cos C' - \sin B' \sin C' \cos a'$ , pero si esto es válido para el triángulo polar también será válido, en general, para cualquier triángulo, de modo que:

$$\cos A = -\cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a \quad 1^{\text{a}} \text{ fórmula polar de Bessel} \quad (7)$$

Aplicándolo a la ecuación (6) obtenemos  $-\sin A' \cos b' = -\cos B' \sin C' - \sin B' \cos C' \cos a'$ , que de nuevo es válido en general, por lo tanto:

$$\sin A \cos B = -\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \quad 3^{\text{a}} \text{ fórmula polar de Bessel} \quad (8)$$

La ecuación (5) no nos da ninguna expresión nueva al aplicarla al triángulo polar.

### 1.3.3. Fórmula de la cotangente

Esta fórmula se obtiene dividiendo la ecuación (6) por la (5) (en el término a la izquierda del signo igual se divide por  $\sin a \sin B$  mientras que el término a la derecha se divide por  $\sin b \sin A$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\sin a \cos B}{\sin a \sin B} &= \frac{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A}{\sin b \sin A} \\ \cot B &= \frac{\cot b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A} \\ \sin A \cot B &= \cot b \sin c - \cos c \cos A \end{aligned} \quad (9)$$

### 1.3.4. Fórmula de Cagnoli

Si multiplicamos la ecuación (4) por  $\cos A$  y le sumamos a los dos términos  $\sin b \sin c$  obtenemos fácilmente el resultado  $\cos b \cos c \cos A + \sin b \sin c = \cos a \cos A + \sin b \sin c \sin^2 A$ .

Pasándolo al triángulo polar tenemos la expresión  $-\cos B \cos C \cos a + \sin B \sin C = \cos A \cos a + \sin B \sin C \sin^2 a$ .

Empleando la ecuación (5) dos veces, de modo que  $\sin B \sin C \sin^2 a = \sin b \sin c \sin^2 A$  entonces tenemos que

$$-\cos B \cos C \cos a + \sin B \sin C = \cos A \underbrace{\cos a}_{*} + \sin b \sin c \sin^2 A$$

Si sustituimos  $*$  por el valor dado en la primera fórmula de Bessel obtenemos la llamada fórmula de Cagnoli:

$$\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a \quad (10)$$

## 1.4. Fórmulas fundamentales de segundo orden de la trigonometría esférica

### 1.4.1. Fórmulas de Borda

Estas fórmulas son seis (una para cada lado y una para cada ángulo):

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} e \operatorname{sen}(A - e)}{\operatorname{sen}(B - e) \operatorname{sen}(C - e)}} \quad 2e = A + B + C - \pi \quad (11)$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - b) \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p - a)}} \quad 2p = a + b + c \quad (12)$$

Las otras cuatro expresiones se obtienen permutando los elementos.

### 1.4.2. Analogías de Delambre

Las analogías de Delambre son doce, cuatro analogías representativas (las otras ocho se obtienen permutando elementos) son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} &= \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{B-C}{2} & \cos \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} &= \operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{B-C}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{b+c}{2} &= \cos \frac{a}{2} \cos \frac{B+C}{2} & \cos \frac{A}{2} \cos \frac{b-c}{2} &= \cos \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{B+C}{2} \end{aligned}$$

### 1.4.3. Analogías de Neper

Estas analogías son también doce, y se obtienen dividiendo las analogías de Delambre miembro a miembro. Cuatro ejemplos son:

$$\begin{aligned} \tan \frac{a+b}{2} &= \frac{\tan \frac{c}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} & \tan \frac{A+B}{2} &= \frac{\cot \frac{C}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \\ \tan \frac{a-b}{2} &= \frac{\tan \frac{c}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}} & \tan \frac{A-B}{2} &= \frac{\cot \frac{C}{2} \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}} \end{aligned}$$

## 1.5. Triángulos esféricos singulares

Existen dos clases de triángulos que poseen una característica especial que ayuda a que los cálculos se simplifiquen notablemente, estos dos triángulos son:

**Triángulos rectángulos:** aquellos triángulos en los que uno de sus ángulos vale  $90^\circ$ .

**Triángulos rectiláteros:** aquellos triángulos en los que uno de sus lados vale  $90^\circ$ .

Que las fórmulas se simplifican de un modo amplio es obvio, pongamos un ejemplo: si tomamos la primera fórmula de Bessel (ecuación (4))  $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$  y tenemos un triángulo rectángulo en el cual  $A = 90^\circ$  la fórmula se simplifica a  $\cos a = \cos b \cos c$ .

## 1.6. Regla del pentágono de Neper

Esta es una regla mnemotécnica para la resolución de triángulos esféricos. Supongamos que tenemos un triángulo rectángulo con  $A = 90^\circ$  o un triángulo rectilátero con  $a = 90^\circ$ . En ese caso podemos construir un pentágono tal y como se indica en la figura 4.

La regla del pentágono de Neper dice que el coseno de un elemento situado en un vértice es igual al producto de las cotangentes de los elementos situados en los vértices continuos e igual al producto de los senos de los elementos situados en vértices opuestos.

Por ejemplo, en el caso de un triángulo rectángulo tenemos que  $\cos a = \cot B \cot C = \operatorname{sen}(90 - b) \operatorname{sen}(90 - c) = \cos b \cos c$ .

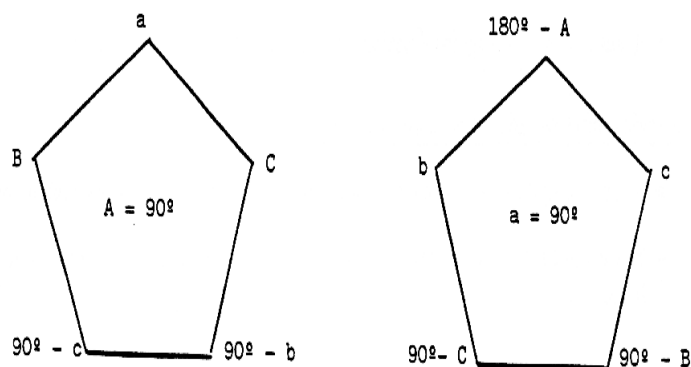


Figura 4: Regla de los pentágonos de Neper

### 1.7. Resolución de triángulos esféricos

Como ya se dijo, resolver un triángulo esférico es, dados tres datos, calcular los otros tres. Existen métodos generales que sólo emplean las fórmulas de Bessel para cumplir este objetivo, aunque usar cualquiera de las otras fórmulas o analogías es igualmente válido.

Hay que hacer notar que los ángulos y lados de los triángulos esféricos se definen entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , con lo que a la hora de resolverlos empleando arco-cosenos y arco-tangentes no se nos presenta ninguna ambigüedad, pero a la hora de emplear arco-senos no sabemos si el ángulo o lado están en el primer cuadrante o en el segundo.

Sea pues un triángulo esférico de ángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$  y lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; veamos cómo se resuelve en función de los datos conocidos:

**Conocidos  $b$ ,  $c$  y  $A$ :** Se calcula el lado  $a$  con la primera fórmula de Bessel para  $\cos a$  y, ahora que conocemos los tres lados, calculamos los otros dos ángulos con la primera fórmula de Bessel para  $\cos b$  y  $\cos c$ .

**Conocidos  $b$ ,  $a$  y  $A$ :** En este caso la solución no es única. Empleando la segunda fórmula de Bessel para los datos conocidos obtenemos el valor  $\sin B$ , que nos da dos soluciones para el ángulo  $B$ . Ahora hacemos dos veces (una para cada valor de  $B$ ) un sistema de ecuaciones con la primera fórmula de Bessel para  $\cos a$  y  $\cos b$  y obtenemos los dos valores correspondientes de  $c$ . Por último, aplicamos para cada valor de  $\cos c$  la primera fórmula de Bessel y obtenemos los dos valores del ángulo que falta.

**Conocidos  $B$ ,  $C$  y  $a$ :** Aplicamos la primera fórmula de Bessel para el triángulo polar para  $\cos A$  y, una vez que obtenemos el ángulo que nos faltaba por conocer, volvemos a aplicar la primera fórmula de Bessel para el triángulo polar para  $\cos B$  y  $\cos C$ .

**Conocidos  $B$ ,  $A$  y  $b$ :** De nuevo la solución no es única. Utilizando la segunda fórmula de Bessel obtenemos los dos valores posibles de  $a$ . Trabajando análogamente al segundo caso, usamos dos sistemas (uno para cada valor de  $a$ ) entre las primeras fórmulas de Bessel para el triángulo polar para  $\cos B$  y  $\cos A$  y tenemos los dos valores de  $C$ . Por último, con la primera fórmula de Bessel para el triángulo polar para  $\cos C$  obtenemos el correspondiente valor  $c$ .

**Conocidos  $a$ ,  $b$  y  $c$ :** En este caso empleamos la primera fórmula de Bessel para calcular los tres ángulos.

**Conocidos  $A$ ,  $B$  y  $C$ :** En este caso empleamos la primera fórmula de Bessel para calcular los tres lados.

### 1.8. Fórmulas diferenciales de la trigonometría esférica

Cuando tenemos un triángulo esférico una pequeña variación en uno de sus datos provoca variaciones en los datos a calcular. En astronomía de posición conviene calcular, pues, los errores en las

posiciones y las variaciones en los datos. Para ello consideramos estos fallos como infinitesimales y los representamos analíticamente como las diferenciales de los elementos, en una primera aproximación. Obtengamos, pues, las fórmulas a partir de la expresión matricial de las fórmulas de Bessel (ecuación (3)), reescribámosla para hacerla más manejable:

$$\begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \sin B \\ \sin a \cos B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin A \sin b \\ \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \end{pmatrix}$$

Diferenciamos esta expresión elemento a elemento, resultando:

$$\begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \sin B \\ \cos a \cos B \end{pmatrix} da + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin a \cos B \\ -\sin a \sin B \end{pmatrix} dB = \begin{pmatrix} -\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A \\ \sin A \cos b \\ -\sin b \sin c - \cos b \cos c \cos A \end{pmatrix} db + \\ + \begin{pmatrix} -\sin b \sin c \sin A \\ \cos A \sin b \\ -\sin b \cos c \cos A \end{pmatrix} dA + \begin{pmatrix} -\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A \\ 0 \\ \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{pmatrix} dc$$

Esta expresión resulta bastante grande, así que procedemos a simplificarla. Damos aquí los pasos a realizar y el resultado final: en la matriz correspondiente a  $db$  aplicamos la tercera fórmula de Bessel (ecuación (6)) en la primera fila y la fórmula de Cagnoli (ecuación (10)) en la tercera; en la matriz correspondiente a  $dA$  aplicamos la segunda fórmula de Bessel (ecuación (5)) tanto a la primera fila como a la segunda; en la matriz correspondiente a  $dc$  aplicamos la tercera fórmula de Bessel (ecuación (6)) a la primera fila y la primera fórmula de Bessel (ecuación (4)) a la tercera.

$$\begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \sin B \\ \cos a \cos B \end{pmatrix} da + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin a \cos B \\ -\sin a \sin B \end{pmatrix} dB = \begin{pmatrix} -\sin a \cos C \\ \sin A \cos b \\ \cos B \cos C \cos a - \sin C \sin B \end{pmatrix} db + \\ + \begin{pmatrix} -\sin c \sin B \sin a \\ \cos A \sin b \\ \cos c \sin B \sin a \end{pmatrix} dA + \begin{pmatrix} -\sin a \cos B \\ 0 \\ \cos a \end{pmatrix} dc$$

Ahora ya podemos pasar a escribir las fórmulas diferenciales de la trigonometría esférica: identificando la primera fila y dividiendo ambos miembros de la igualdad por  $-\sin a$  tenemos:

$$da = \cos C db + \left\{ \frac{\sin c \sin B}{\sin C \sin b} \right\} dA + \cos B dc \quad \text{Primera fórmula diferencial} \quad (13)$$

Identificando la segunda fila y dividiendo por  $\sin a \sin B$  en el primer miembro y por  $\sin A \sin b$  en el segundo obtenemos:

$$\cot a da + \cot B dB = \cot b db + \cot A dA \quad \text{Segunda fórmula diferencial} \quad (14)$$

Para obtener la tercera fórmula diferencial hay que desarrollar y simplificar un poco la ecuación que se obtiene de identificar la tercera fila. En ella aparece un  $\cos a$  al que aplicaremos la ecuación (4). Después de hacer eso, agrupando términos, obtenemos:

$$\sin B \underbrace{[\cos a \cos B \sin C - \sin a \cos c]}_{-\sin b \cos C} dA - \sin a \sin B dB + \sin B \sin C dC + \cos a \underbrace{[\cos^2 B - 1]}_{-\sin^2 B} dC = 0$$

Que, tras dividir ambos términos de la igualdad por  $\sin B$  nos da:

$$\sin a dB = -\sin b \cos C dA + \sin C db - \sin B \cos a dc \quad \text{Tercera fórmula diferencial} \quad (15)$$

## 2. Forma y dimensiones de la Tierra. Coordenadas terrestres

La cuestión de la forma que presenta nuestro planeta y sus dimensiones la trata una ciencia llamada *geodesia*. Este estudio se lleva a cabo por medio de aproximaciones sucesivas.

Antiguamente se le dieron formas muy diversas a la Tierra, fueron los filósofos pitagóricos los que dijeron que era una esfera (s.VI a.C.) basándose en experiencias de los navegantes al observar las estrellas; la desaparición de un barco a medida que se aleja de la costa o la forma de la sombra que proyecta la Tierra sobre la Luna en un eclipse (Aristóteles).

Una vez admitida la hipótesis de que la Tierra es esférica habría que determinar su tamaño. Eratóstenes realizó una experiencia para obtener el radio. Sabía que en el solsticio de verano el sol no proyectaba sombra al mediodía en la antigua ciudad de Siena, sin embargo en Alejandría sí. Midiendo la distancia entre Siena y Alejandría y el tamaño de la sombra al mediodía del solsticio calculó un valor del radio  $R = 6267\text{km}$ , 111km menor que el radio ecuatorial actualmente admitido. Este error es debido a varios hechos que Eratóstenes dio por ciertos y no lo son: Alejandría y Siena no están en el mismo meridiano; el sol no está justo sobre Siena el día del solsticio<sup>1</sup> y la Tierra no es exactamente esférica.

Fue Newton en el s.XVII cuando enunció su ley de la gravitación universal y estableció un postulado:

Al combinar el efecto de las fuerzas gravitatorias terrestres y la fuerza centrífuga debida a la rotación sobre la masa elástica de la Tierra, se produce un achatamiento en los polos.

Por lo tanto la forma de la Tierra sería la de un elipsoide de revolución según Newton. En el s.XVIII dos expediciones midieron el radio ecuatorial y polar de la Tierra para confirmar este postulado, pero se encontraron que a ángulos iguales no le corresponden arcos iguales, por lo que la forma tampoco sería esa. El error es debido a que las masas internas de la Tierra son inhomogéneas y esto Newton no lo tuvo en cuenta.

En general la forma de la Tierra es muy complicada y no se puede representar mediante una superficie geométrica de formulación matemática simple. Es por esto que se define el *geoide*.

### 2.1. El geoide

El geoide es una figura definida para describir la forma de la Tierra. Su propiedad característica a la hora de definirlo es que es normal a la dirección de la gravedad en cada punto, entendiendo por gravedad la composición de la fuerza centrífuga y la fuerza de gravitación.

El campo gravitatorio terrestre resulta ser un campo conservativo, con lo que deriva de un potencial, lo que matemáticamente se expresa por:  $\vec{F} = -\nabla V$ . De modo que si  $V(x, y, z) = \text{cte}$  tenemos superficies equipotenciales.

Entonces podemos definir el geoide como la superficie equipotencial del campo gravitatorio terrestre al nivel del mar. Es decir, la superficie en calma de los océanos prolongada al lugar ocupado por los continentes.

En la actualidad la geodesia (y la forma del geoide) se basa en el estudio de las órbitas de los satélites artificiales.

Se demuestra en mecánica que el potencial terrestre se puede representar en función de los armónicos esféricos  $J_i$ , de modo que:

$$V = J_1(\dots) + J_2(\dots) + J_3(\dots) + \dots$$

Donde los  $J_i$  se determinan a partir de las órbitas de los satélites. Si eliminamos todos los armónicos esféricos en los que  $i > 1$  (sabiendo que  $J_1 = 1$ ) nos queda la expresión del potencial debido a una esfera homogénea, pero los satélites no se ajustan a esta órbita. Teniendo en cuenta el siguiente término el potencial se corresponde con un elipsoide de revolución; si introducimos el siguiente armónico nos daría una figura ligeramente parecida a una pera... La forma iría evolucionando según tuviésemos en cuenta más y más potenciales armónicos.

En estos apuntes vamos a suponer, para simplificar las cosas, que la forma de la Tierra es un elipsoide de revolución. Esta suposición no es muy descabellada ya que la distancia máxima entre el

---

<sup>1</sup>No proyecta sombra por causa de refracción atmosférica, tema que no se tratará en este curso

radio del geoide y el radio del elipsoide es de 100m, diferencia despreciable en distancias planetares y estelares. A este elipsoide le llamaremos *elipsoide de referencia*. El eje de giro pasa por los polos y coincide con el eje menor. Las dimensiones fueron definidas en el año 1976 por la Unión de Astrónomos Internacional del siguiente modo:

- $a$ =radio ecuatorial= $6378,140km$
- $b$ =radio polar= $6356,755km$
- $\alpha$ =achatamiento= $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,257}$
- $e$ =excentricidad= $\sqrt{\alpha(2-\alpha)} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = 0,08182$

## 2.2. Definiciones

**Meridianos terrestres:** son las líneas elipsoidales determinadas por el corte entre el elipsoide y el haz de planos que define el eje menor. Se considera como *meridiano cero* al que pasa por el observatorio de Greenwich.

- Si tomamos un punto cualquiera  $A$  del elipsoide por él pasará un meridiano y un paralelo exclusivamente. Llamamos **meridiano superior** de un lugar  $A$  a la semielipse que parte de los polos y pasa por el lugar  $A$ .
- Llamamos **meridiano inferior** a la semielipse que parte de los polos pero no pasa por el lugar  $A$ .

**Polos:** son los extremos donde el eje menor corta al elipsoide.

**Ecuador:** el corte entre el plano perpendicular al eje menor que pasa por el centro del elipsoide y éste. Es un círculo máximo.

**Paralelos terrestres:** el corte entre los planos paralelos al ecuador y el elipsoide de referencia. Son círculos menores. Se considera como *paralelo cero* al ecuador.

**Vertical de un lugar:** es la normal a la elipse por el lugar  $A$ . Esta vertical define dos direcciones: hacia arriba el *zénit* ( $Z$ ) y hacia abajo el *nadir* ( $Z'$ ).

**Horizonte del lugar:** es el plano perpendicular a la vertical del lugar  $A$ . El horizonte interseca al plano que contiene al meridiano superior en una línea llamada *línea meridiana*. Esta línea indica la dirección norte-sur. La perpendicular a la línea meridiana trazada sobre el horizonte del lugar indica la dirección este-oeste.

## 2.3. Coordenadas

### 2.3.1. Coordenadas geográficas



Figura 5: Coordenadas terrestres geográficas

**Latitud geográfica ( $\phi$ ):** ángulo que forma la vertical del lugar con el plano del ecuador. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $+90^\circ$  si los contamos en dirección norte y entre  $0^\circ$  y  $-90^\circ$  si los contamos en dirección sur.

**Longitud geográfica ( $\lambda$ ):** ángulo diedro que forma el meridiano cero con el meridiano superior del lugar. Este valor varía entre  $0^h$  y  $+12^h$  si los contamos en dirección este y entre  $0^h$  y  $-12^h$  si los contamos en dirección oeste<sup>2</sup>.

### 2.3.2. Coordenadas geocéntricas

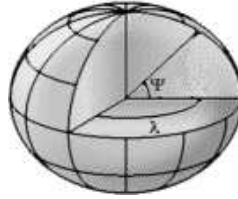


Figura 6: Coordenadas terrestres geocéntricas

**Radio vector:** es la distancia entre el centro de la Tierra y el lugar  $A$ .

**Latitud geocéntrica ( $\psi$ ):** ángulo que forma el radio vector con el plano del ecuador. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $+90^\circ$  si los contamos en dirección norte y entre  $0^\circ$  y  $-90^\circ$  si los contamos en dirección sur.

**Latitud geocéntrica:** coincide con la latitud geográfica ( $\lambda$ ).

### 2.3.3. Latitud reducida o excéntrica



Figura 7: Coordenadas terrestres con latitud reducida

A veces se usa otra latitud que se denomina latitud reducida o excéntrica. Para definirla se traza una semicircunferencia de radio igual al semieje mayor y se pasa por  $A$  una perpendicular al semieje mayor que corta a la semicircunferencia en  $A'$ . Si unimos  $A'$  con el centro de la elipse vemos que esta línea corta al plano del ecuador con un ángulo  $u$ , que es la latitud reducida.

## 2.4. Relación entre las latitudes

Hay que hacer notar que el punto  $A = (x, y)$  pertenece a una elipse, por lo tanto verifica su ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$


---

<sup>2</sup>Hay que hacer notar que  $360^\circ = 24^h$ , de modo que  $15^\circ = 1^h$ ,  $15' = 1^m$  y  $15'' = 1^s$ .

Por inspección de las figuras se puede observar que  $\tan \psi = \frac{y}{x}$ . Para hallar la tangente de  $\phi$  vemos que es la normal a la tangente a una curva por un punto, por lo que (como demuestra el cálculo diferencial)  $\tan \phi = -\frac{1}{f'(x,y)} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x}$ .

Relacionando estas dos tangentes vemos enseguida que

$$\tan \phi = \frac{a^2}{b^2} \tan \psi \quad (16)$$

Por otra parte el punto  $A' = (x', y')$  pertenece a una circunferencia y cumple la ecuación  $x'^2 + y'^2 = a^2$ . Por construcción tenemos, además, que  $x' = x$ , de modo que

$$\frac{x'^2 + y'^2}{a^2} = 1 \Rightarrow 1 - \frac{y'^2}{a^2} = \frac{x'^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y' = \frac{a}{b} y$$

Podemos escribir la ecuación de la esfera dependiendo de la latitud reducida  $u$  del modo siguiente:  $x' = a \cos u$ ,  $y' = a \sin u$ . Por tanto, de esta relación y la deducida anteriormente obtenemos

$$y = b \sin u \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{b \sin u}{a \cos u} \Rightarrow \tan \psi = \frac{b}{a} \tan u \quad (17)$$

Para obtener la tercera relación entre las latitudes basta con combinar las dos relaciones obtenidas, con lo que queda:

$$\tan \phi = \frac{a}{b} \tan u \quad (18)$$

## 2.5. Relación entre $\rho$ y las latitudes

De la definición de las coordenadas geocéntricas relacionamos  $\rho$  con las coordenadas cartesianas: resulta obvio ver que  $x = \rho \cos \psi$  e  $y = \rho \sin \psi$ , con lo que  $x^2 + y^2 = \rho^2$ .

Además, por la definición de latitud reducida se puede ver que  $\rho^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u$ , y teniendo en cuenta que según la definición de excentricidad  $b^2 = a^2(1 - e^2)$  podemos llegar a que  $\rho^2 = a^2(1 - e^2 \sin^2 u)$ .

Partiendo de la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas llegamos a otra relación entre  $\rho$  y  $\psi$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 = \frac{\rho^2 \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \psi}{b^2} = 1$ , por lo que  $\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}$ .

Por último, y como  $\tan \phi = \frac{a}{b} \tan \psi$  llegamos a  $\rho^2 = \frac{a^4 \cos^2 \phi + b^4 \sin^2 \phi}{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}$ .

## 2.6. Correcciones a las coordenadas

Las correcciones que se muestran a continuación se hacen necesarias debido a que el lugar de observación no se encuentra, por lo general, sobre el elipsoide que empleamos para describir la Tierra, sino a una altitud sobre él. Esta altitud ( $h$ ) se mide sobre la vertical del lugar, de modo que podemos definir las nuevas coordenadas ( $X, Y$ ) del lugar como:

$$X = x + \Delta x = x + h \cos \phi$$

$$Y = y + \Delta y = y + h \sin \phi$$

Ahora intentaremos expresar  $x$  e  $y$  también como función de la latitud geográfica para tener expresiones sólo en función de ella. Se verifica que

$$x = \rho \cos \psi = a \cos u = aC(\phi) \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \psi = b \sin u = aS(\phi) \sin \phi$$

donde  $C(\phi)$  y  $S(\phi)$  son dos funciones a calcular.

Si dividimos  $y$  por  $x$  obtenemos:

$$\frac{y}{x} = \tan \psi = \frac{b}{a} \tan u = \frac{S}{C} \tan \phi$$

que, teniendo en cuenta la ecuación (18) nos queda como

$$\frac{b}{a} \tan u = \frac{S}{C} \frac{a}{b} \tan u \Rightarrow S = \frac{b^2}{a^2} C$$

Ahora, despejando de la expresión para  $x$  tenemos que  $\cos u = C \cos \phi$  y despejando de la expresión para  $y$  tenemos que  $\sin u = \frac{a}{b} S \sin \phi$ . Elevándolas al cuadrado y sumando miembro a miembro obtenemos la expresión para  $C$ :

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 = C^2 \cos^2 \phi + \frac{a^2}{b^2} S^2 \sin^2 \phi = C^2 \left[ \cos^2 \phi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \phi \right]$$

$$C^2 = \frac{a^2}{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} \quad (19)$$

Y despejando de la relación entre  $S$  y  $C$

$$S^2 = \frac{b^4/a^2}{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} \quad (20)$$

Por tanto las ecuaciones para la posición de un lugar en relación al elipsoide de la Tierra, teniendo en cuenta la corrección por motivo de la altitud, son:

$$X = (aC(\phi) + h) \cos \phi \quad (21)$$

$$Y = (aS(\phi) + h) \sin \phi \quad (22)$$

con  $C(\phi)$  y  $S(\phi)$  dadas por las ecuaciones (19) y (20).

### 3. Esfera celeste. Movimiento diurno aparente. Rotación de la Tierra

#### 3.1. Movimiento diurno aparente

Hemos aproximado la Tierra a un elipsoide de rotación. La Tierra tiene un movimiento de rotación en el sentido oeste-este en torno al eje menor.

Nosotros no percibimos de forma obvia este movimiento. Pero, si por ejemplo miramos hacia el sur de noche veremos a las estrellas saliendo por el este y poniéndose por el oeste trazando arcos de circunferencia. Si miramos hacia el este veremos como las estrellas salen “inclinadas” y hacia el oeste se ponen con la inclinación contraria. Si miramos hacia el norte veremos que las estrellas trazan semicircunferencias con el centro situado hacia arriba del horizonte.

Da la impresión, por tanto, de que las estrellas se mueven. Este movimiento aparente recibe el nombre de *movimiento diurno aparente*. Es, como parece lógico, una consecuencia del movimiento de rotación de la Tierra.

#### 3.2. La esfera celeste

La *esfera celeste* es una esfera imaginaria concéntrica con la Tierra, de radio arbitrariamente grande y sobre la cual se encuentran proyectadas las estrellas mediante radios. La esfera celeste está dotada de un movimiento de rotación en torno al eje  $PP'$  que llamamos eje del mundo. Es la prolongación del eje de rotación de la Tierra. Sobre esta esfera podemos definir objetos análogos a los definidos sobre la Tierra, así tenemos *polo norte celeste*, *polo sur celeste*, *ecuador celeste*, *meridianos celestes* (también llamados *círculos horarios*)... Sin embargo, en este caso, el sentido de rotación de la esfera es el contrario a la Tierra, es decir, este-oeste.

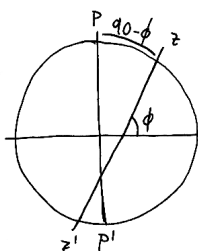


Figura 8: Prolongación de la vertical de un lugar a la esfera celeste

Sobre un punto de la Tierra vimos que pasaba un meridiano y, a partir de él, teníamos definida la vertical del lugar. Si prolongamos esta vertical sobre la esfera celeste (vemos que angularmente coincide no con la latitud, sino su ángulo complementario: el que forma el eje de rotación con la vertical) nos da el zénit y el nadir. Análogamente a la Tierra podemos definir el meridiano superior o inferior de un lugar.

Como ya hemos dicho las estrellas se consideran fijas en la superficie de la esfera celeste y ésta rota, por tanto las estrellas estarán dibujando círculos menores, serán los *paralelos celestes*. Lo normal es representar la esfera celeste como en la figura 9.

El plano perpendicular a la vertical del lugar corta a la esfera celeste en un círculo máximo llamado *horizonte*.  $N$  es el punto norte (el más cercano a  $P$ ) y  $S$  el punto sur (el más cercano a  $P'$ ). Sobre los paralelos celestes podemos definir cuatro puntos clave, que son los siguientes:

- 1 - **Orto:** punto en el que la estrella atraviesa el horizonte para hacerse visible.
- 2 - **Culminación superior:** momento en el que la estrella atraviesa el meridiano superior del lugar.
- 3 - **Ocaso:** punto en el que la estrella atraviesa el horizonte para dejar de ser visible.

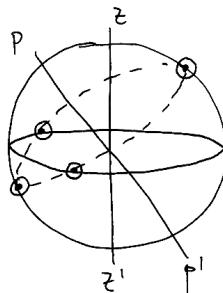


Figura 9: Representación de la esfera celeste con el zénit y los polos

**4 - Culminación inferior:** momento en el que la estrella atraviesa el meridiano inferior del lugar.

Algunas estrellas se ven siempre (y por tanto no tienen ni orto ni ocaso) y reciben el nombre de estrellas *circumpolares*. Otras estrellas tampoco tienen ni orto ni ocaso, pero no se ven nunca, son las estrellas *anticircumpolares*.

Dependiendo del lugar de observación veríamos unas estrellas u otras.

- Si el observador está en el polo norte la vertical del lugar coincide con el eje de rotación, lo que implica que el horizonte coincide con el ecuador. En este caso todas las estrellas del hemisferio norte son visibles y no lo es ninguna del hemisferio sur. Además todas las estrellas son circumpolares.
- Si el observador está en el ecuador el eje de rotación terrestre y la vertical del lugar son perpendiculares: el horizonte contiene al eje del mundo. En este caso se ven todas las estrellas de la esfera terrestre.
- Si el observador se encuentra en el hemisferio sur (no en el polo sur) es movimiento aparente es contrario al del hemisferio norte, pero los puntos cardinales mantienen la posición. Las estrellas siguen saliendo por el este y poniéndose por el oeste.

### 3.3. Rotación terrestre

Que la Tierra rota es actualmente aceptado por todo el mundo. Tenemos muchas evidencias de ello, pero quizás una de las más importantes sea el péndulo de Foucault, que aprovecha la propiedad pendular de mantener constante el plano de las oscilaciones para ver una variación en el ángulo de oscilación de los péndulos refiriéndose al suelo del lugar donde esté oscilando y que se explica con la rotación terrestre.

En principio tenemos el problema de que la rotación de la Tierra *no* es uniforme, sin embargo podemos suponer, por aproximación, que sí lo es sin cometer mucho error.

Las principales causas de la no uniformidad de la rotación son:

- Causas de tipo secular: la masa líquida de la Tierra frena la rotación.
- Variaciones periódicas: la velocidad de rotación oscila entre un máximo y un mínimo
- Variaciones irregulares: se producen por cambios en la estructura interna de la Tierra
- Precesión del eje: se da un movimiento de precesión en el eje de la Tierra con un período de 430 días. La curva de precesión no es cerrada, pero está contenida en un cuadrado de 30 metros de lado.

Esto repercute en las coordenadas de la Tierra, especialmente en las latitudes. Por eso, al hablar de latitud geográfica se distingue entre la instantánea y la media. Las longitudes también se ven afectadas, pero apenas unas centésimas de segundo de arco.

## 4. Movimiento orbital de la Tierra

### 4.1. Los planetas

Planeta viene de una palabra griega que venía a significar *errante*. Esto es debido a que mientras las estrellas permanecían fijas en sus posiciones en la esfera celeste los planetas están situados en unas posiciones algunos días y en otras posiciones unos días después. Además se observaba que la posición de estos planetas, a veces, volvía hacia atrás, sin aparente armonía. Por estas razones se los asoció con dioses en la antigüedad, parecían tener libre albedrío. Estas “deidades” eran Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno.

Actualmente sabemos a qué se debe que los planetas varíen de posición en la esfera celeste, están orbitando alrededor del sol. Esto explica también el movimiento retrógrado que se observa.

En 1781 W. Herschel descubrió de modo accidental (mientras hacía observaciones estelares) el planeta Urano. Al principio creyó que era un cometa, pero al observarlo durante un año se vio que la órbita se acercaba mucho más a la órbita típica de los planetas, y no la de los cometas. Finalmente fue Lexell quien demostró que se trataba de un planeta.

Se continuó observando al planeta Urano y se vieron ciertas anomalías en su órbita. Adams y Levelier (independientemente) intentaron calcular la órbita de un planeta a mayores que provocase esas anomalías y, en septiembre de 1846, los astrónomos Galle y d’Arrest encontraron el planeta Neptuno en el lugar predicho.

De nuevo merced a anomalías en la órbita se descubrió Plutón. Fue Tombaugh en 1930 quien lo descubrió empleando la técnica de la fotografía, debido a lo lejos que está este planeta de la Tierra.

Los planetas se pueden clasificar en *interiores* (Mercurio, Venus y la Tierra) y *exteriores* (el resto); o bien en *terrestres* (Mercurio, Venus, Tierra y Marte) o *jovianos* (el resto).

### 4.2. Ley de Titius-Bode

Esta no es una ley válida, pero durante mucho tiempo<sup>3</sup> se creyó que era cierta pues describía de un modo bastante bueno la relación entre las distancias de los planetas al sol, para llegar a ella hagamos una sucesión cuyo primer término sea un cero, el segundo un tres y a partir de ahí cada término es el doble del anterior:

0    3    6    12    24    48    96    192    384

Ahora, sumémosle cuatro a todos los términos:

4    7    10    16    28    52    100    196    388

Y, para normalizarlo, dividamos entre diez, así nos queda la distancia Sol-Tierra (obviamente el tercer término) igual uno, que es básicamente la definición de la Unidad Astronómica:

0,4    0,7    1,0    1,6    2,8    5,2    10,0    19,6    38,8

Ahora hagamos la comparación de distancias con los planetas conocidos:

Planeta	Distancia real	Titius-Bode
Mercurio	0,39	0,4
Venus	0,72	0,7
Tierra	1	1
Marte	1,52	1,6
-	-	2,8
Júpiter	5,2	5,2
Saturno	9,54	10,0
Urano	19,21	19,6
Neptuno	30,11	38,8
Plutón	39,54	77,2

---

<sup>3</sup>La ley fue enunciada en 1772

Vemos que la ley falla para Neptuno y Plutón, que se descubrieron mucho después que la ley (sin embargo coincide para Urano, descubierto algo después) esta es la razón de que fuese aceptada. Además, en el hueco que aparece a las 2,8UA se encontró el cinturón de asteroides, lo que parecía corroborar aún más esta regla.

### 4.3. Movimiento orbital de la Tierra

En general, cualquier astro orbita en torno al sol describiendo una órbita con forma de curva cónica. Si la energía cinética del astro no es excesivamente alta esta curva es una elipse, es el caso de los planetas, los asteroides del cinturón de asteroides y los cometas que vuelven regularmente. El punto más cercano entre la elipse y el sol se conoce como *periastro* y el más lejano como *apoastro*. En el caso concreto de la Tierra los puntos reciben el nombre de *Perihelio* y *afelio*<sup>4</sup>.

Por tanto la Tierra gira en torno al Sol describiendo una elipse. Esta elipse está contenida en un plano que recibe el nombre de *eclíptica*. Hay que hacer notar que el eje de rotación de la Tierra no está perpendicular a la eclíptica, forma un cierto ángulo conocido como *oblicuidad de la eclíptica* y que toma el valor  $\varepsilon \simeq 23^\circ 27'$ .

Si proyectamos la imagen del Sol sobre la esfera celeste (que estaba centrada en la Tierra) se ve que su posición va cambiando a lo largo de un año. Es la forma de percibir la traslación. En realidad parece (debido a que somos observadores terrestres) que lo que ocurre es que el Sol gira en torno a la Tierra recorriendo una elipse con la Tierra en un foco. Sabemos que esto no es así en absoluto, sin embargo, a nivel astronómico, lo vamos a considerar de ese modo.

Por lo tanto tenemos la órbita eclíptica (órbita aparente del Sol alrededor de la Tierra) con dos puntos principales, el *perigeo* y el *apogeo*. A la línea que une estos dos puntos se la llama *línea de los ápsides* y se corresponde al eje mayor de órbita. Al trasladarlo a la esfera celeste obtenemos lo siguiente:

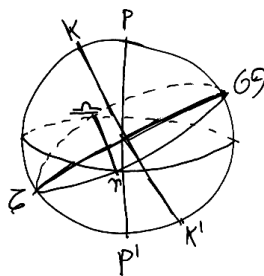


Figura 10: Representación de la esfera celeste con los polos y los polos eclípticos

**Eje eclíptico:** es el eje perpendicular a la eclíptica, sus vértices se denotan  $k$  y  $k'$  y se denominan *polos eclípticos*.

**Línea de los equinoccios:** es la línea en la que se cortan el plano de la eclíptica y el plano del ecuador. A su vez, esta línea interseca a la esfera celeste en dos puntos:

- Punto aries ( $\Upsilon$ ) también llamado equinoccio de marzo o punto gamma. El Sol pasa por ese punto el 21 de marzo, aproximadamente.
- Punto libra ( $\varpi$ ) también llamado equinoccio de septiembre. El Sol pasa por ese punto el 22 de septiembre, aproximadamente.

**Línea de los solsticios:** es la línea perpendicular a los equinoccios dibujada sobre la eclíptica. Esta línea también interseca a la esfera celeste en dos puntos:

<sup>4</sup>De ap+Helium, el grupo *ph* evolucionó a *f*

- Punto cáncer ( $\text{☊}$ ) también llamado solsticio de junio. El Sol pasa por este punto el 21 de junio, aproximadamente.
- Punto capricornio ( $\text{☋}$ ) también llamado solsticio de diciembre. El Sol pasa por este punto el 22 de diciembre, aproximadamente.

Hay que hacer notar que ninguna de estas líneas (ápsides, equinoccios y solsticios) coinciden, de hecho la línea de solsticios y la de ápsides forman un ángulo de aproximadamente  $11^\circ$ .

Para la determinación de los puntos  $\Upsilon$ ,  $\text{☊}$ ,  $\text{☋}$  y  $\text{☌}$  hay que comprobar donde se proyecta el sol cada uno de los días de solsticio y equinoccio. El problema está en un efecto físico denominado *precesión de los equinoccios* que hace que el eje de rotación de la Tierra no esté estático, sino que describe un cono con un periodo de 26.000 años. De hecho, hoy en día el punto aries está más cerca de la constelación de piscis que de la constelación de aries, pero mantenemos, aún así, la nomenclatura.

#### 4.4. Movimiento aparente del Sol a lo largo de un año

El año astronómico comienza el día del equinoccio de primavera, es decir, cuando el sol pasa por el punto  $\Upsilon$ . En este día el sol recorre el ecuador y, con el paso de los días, irá recorriendo paralelos (en realidad es un movimiento espiral, pero se puede considerar que pasa de un paralelo a otro muy cercano) hasta llegar al punto  $\text{☊}$ . Después comienza a recorrer paralelos acercándose de nuevo al ecuador, por donde pasa en septiembre y llega hasta el punto  $\text{☋}$ , donde comienza a subir de nuevo hasta llegar al ecuador de nuevo y completar el año astronómico.

Un observador situado en el hemisferio norte vería que en el equinoccio de marzo el sol sale justo por el este y se pone justo por el oeste. En el solsticio de junio (cuando los días son más largos) el sol saldría por el noreste y se pondría por el noroeste. En el equinoccio de septiembre se volvería a ver al sol saliendo por el este y poniéndose por el oeste y en el solsticio de diciembre (el día más corto) se vería salir hacia el sureste y ponerse en el suroeste.

## 5. Sistemas de coordenadas astronómicas. Transformaciones de coordenadas

Es necesario establecer un sistema de referencia para posicionar los astros. Esencialmente esos sistemas de referencia van a ser coordenadas polares esféricas en las que no vamos a tener en cuenta la distancia (la esfera celeste tiene radio unidad). Podemos clasificar los diferentes sistemas de acuerdo con su origen (quien ocupa el centro de la esfera celeste) en *sistemas topocéntricos*: el origen está ocupado por un lugar de la superficie terrestre; *sistemas geocéntricos*: el origen es el centro de la Tierra y *sistemas heliocéntricos*: el centro está ocupado por el sol.

Los diferentes sistemas de coordenadas astronómicas van a tener unos planos fundamentales asociados. según este plano fundamental podemos clasificar los sistemas en: *horizontales*, *ecuatoriales*, *horarias*, *ecuatoriales absolutas*, *eclípticas* o *galácticas*.

### 5.1. Coordenadas horizontales

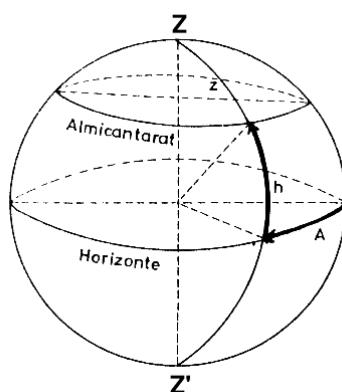


Figura 11: Coordenadas horizontales

El plano fundamental de este sistema es el **plano del horizonte**. Los *círculos verticales* son los círculos máximos sobre la esfera celeste que pasan por el zénit y el nadir. En particular, el círculo vertical que pasa por los polos  $P$  y  $P'$  es el *meridiano del lugar* (donde también se diferencia entre meridiano superior y meridiano inferior). Los círculos paralelos al horizonte se denominan *almicantaras*.

La intersección del horizonte con el meridiano define una línea que llamamos *línea meridiana*. Ésta marca los sentidos norte-sur. Perpendicular a ella se traza otra línea que nos da los sentidos este-oeste. Se denomina *primer vertical* al que pasa por el este y el oeste.

Las dos coordenadas horizontales son:

**Altura ( $h$ ):** es el ángulo que forma la visual del astro con el horizonte. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $+90^\circ$  en dirección al zénit y entre  $0^\circ$  y  $-90^\circ$  en dirección al nadir.

**Azimut ( $A$ ):** es el ángulo diedro que forma el meridiano superior del lugar con el círculo vertical que pasa por el astro. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  y se cuenta en sentido S-W-N-E.

Otra cantidad relacionada con este sistema de coordenadas es la **distancia zenital ( $z$ )**, que se define como  $z = 90^\circ - h$  y varía, por tanto, entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  contándose en el sentido zénit-nadir.

Es obvio que este es un sistema de coordenadas local, depende del lugar de observación y del movimiento diurno. Es el utilizado por telescopios con montura altazimutal, el más empleado es el de teodolito.

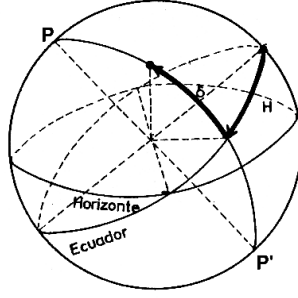


Figura 12: Coordenadas ecuatoriales horarias

## 5.2. Coordenadas ecuatoriales horarias

El plano fundamental de este sistema es el **plano del ecuador**. A los círculos máximos que pasan por los polos norte y sur los denominaremos *círculos horarios* y a los planos paralelos al ecuador *paralelos celestes*. El círculo horario que contiene al eje  $PP'$  y al eje  $ZZ'$  es el *meridiano del lugar*.

Las dos coordenadas ecuatoriales horarias son:

**Declinación ( $\delta$ ):** es el ángulo que forma la visual del astro con el ecuador. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $+90^\circ$  en dirección a  $P$  y entre  $0^\circ$  y  $-90^\circ$  en dirección a  $P'$ .

**Ángulo horario ( $H$ ):** es el ángulo diedro que forma el meridiano superior del lugar con el círculo horario que pasa por el astro. Este valor varía entre  $0^h$  y  $24^h$  contándose en el sentido del movimiento diurno.

Análogamente a la distancia zenital se define la **distancia polar ( $p$ )** como  $p = 90^\circ - \delta$ . Esta distancia varía desde el valor  $0^\circ$  en  $P$  hasta  $180^\circ$  en  $P'$ .

Este es un sistema semilocal, una de las coordenadas (la declinación) no varía con el lugar de observación, sin embargo el ángulo horario sí. Es el empleado por telescopios con montura ecuatorial.

## 5.3. Transformación de coordenadas horizontales a ecuatoriales horarias

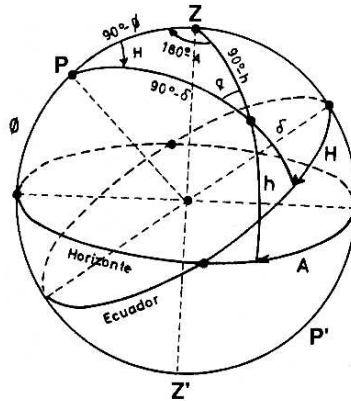


Figura 13: Cambio entre coordenadas horarias y horizontales

Para pasar de un sistema de coordenadas al otro observamos que están relacionadas por un ángulo  $\Phi$  que resulta ser la latitud del lugar. Al resolver el triángulo esférico que aparece ahí podemos obtener relaciones que permiten pasar de las coordenadas horizontales  $(A, h)$  a las ecuatoriales horarias  $(H, \delta)$

A partir de la ecuación (4):

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \delta) &= \cos(90^\circ - \Phi) \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \Phi) \sin(90^\circ - h) \cos(180^\circ - A) \\ \sin \delta &= \sin \Phi \sin h - \cos \Phi \cos h \cos A\end{aligned}$$

a partir de la ecuación (5):

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \delta) \sin H &= \sin(90^\circ - h) \sin(180^\circ - A) \\ \cos \delta \sin H &= \cos h \sin A\end{aligned}$$

y a partir de la ecuación (6):

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \delta) \cos H &= \cos(90^\circ - h) \sin(90^\circ - \Phi) - \sin(90^\circ - h) \cos(90^\circ - \Phi) \cos(180^\circ - A) \\ \cos \delta \cos H &= \sin h \cos \Phi + \sin \Phi \cos h \cos A\end{aligned}$$

Estas tres expresiones son válidas en ambos hemisferios. Recíprocamente, para pasar de coordenadas horarias  $(H, \delta)$  a horizontales  $(A, h)$  obtenemos las expresiones:

$$\begin{aligned}\cos h \sin A &= \cos \delta \sin H \\ \sin h &= \sin \delta \sin \Phi + \cos \delta \cos \Phi \cos H \\ \cos h \cos A &= -\sin \delta \cos \Phi + \cos \delta \sin \Phi \cos H\end{aligned}$$

Válidas también para ambos hemisferios.

Estas relaciones son justamente las mismas expresiones que si calculamos la relación entre las coordenadas  $xyz$  del sistema ecuatorial horario y las coordenadas  $x'y'z'$  del sistema horizontal como rotaciones de un sistema cartesiano, como se demuestra en el apéndice A.

Cuando el astro se encuentra sobre el meridiano del lugar las expresiones que relacionan  $\phi$ ,  $h$  y  $\delta$  se simplifican sobremanera. Así, cuando el astro culmina entre  $P$  y  $Z$  tenemos que  $\delta = \phi + h$ . Si el astro no culmina entre el polo y el zénit se dan dos casos: si culmina en el meridiano superior  $\phi = \delta + h$ , si culmina en el meridiano inferior entonces  $\delta + \phi + h = 180^\circ$ .

#### 5.4. Coordenadas ecuatoriales absolutas

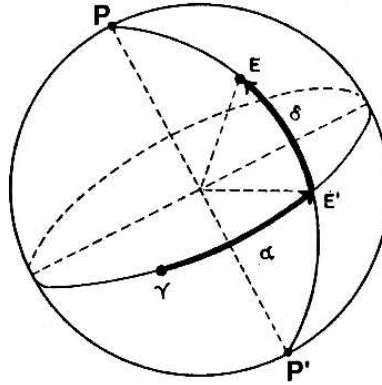


Figura 14: Coordenadas ecuatoriales absolutas

El plano fundamental de este sistema es el **plano del ecuador**, al igual que en las coordenadas ecuatoriales horarias. De hecho se definen los mismos elementos sobre la esfera celeste y una de las coordenadas coincide.

Las dos coordenadas ecuatoriales absolutas son:

**Declinación ( $\delta$ ):** es el ángulo que forma la visual del astro con el ecuador. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $+90^\circ$  en dirección a  $P$  y entre  $0^\circ$  y  $-90^\circ$  en dirección a  $P'$ .

**Ascensión recta ( $\alpha$ ):** es el ángulo diedro que forma el círculo horario origen (que es el que pasa por el punto  $\Upsilon$ ) con el círculo horario que pasa por el astro. Este valor varía entre  $0^h$  y  $24^h$  contándose en el sentido contrario al movimiento diurno.

Como se ve a partir de la definición de declinación, definición de distancia polar tampoco varía con respecto al sistema de coordenadas ecuatoriales horarias.

Este sistema se emplea en catálogos estelares y en efemérides astronómicas. Es un sistema universal, puesto que no depende del movimiento diurno ni del lugar de observación, sin embargo presenta algunos problemas dignos de consideración.

Por ejemplo, en el caso del sol se ve que cada día la declinación de éste varía, alcanzando un máximo en el solsticio de junio igual a la oblicuidad de la eclíptica y un mínimo en el solsticio de diciembre igual a la oblicuidad, pero con signo negativo. Esto se debe a que el Sol recorre la eclíptica.

### 5.5. Relación entre coordenadas ecuatoriales horarias y absolutas. Tiempo sidéreo

Se define el tiempo sidéreo  $\theta$  como el ángulo horario del punto  $\Upsilon$ . Se puede ver sin ninguna complicación que  $\theta = H + \alpha$ , relación fundamental en astronomía de posición.

Hay que darse cuenta de que si  $\theta < \alpha$  entonces tenemos un valor para  $H$  negativo, cuando lo definimos positivo. Para solucionar esto lo que hemos de hacer es sumar  $24^h$  al ángulo horario, aunque a la hora de hacer cálculos con senos y cosenos esto no influye en el resultado.

Cuando un astro se encuentra culminando su ángulo horario vale cero, con lo que el tiempo sidéreo y la ascensión recta del astro coinciden.

En rigor el ángulo horario del punto aries no es constante, ni siquiera de variación uniforme debido a la falta de uniformidad por las variaciones de la rotación terrestre, sin embargo en intervalos de tiempo cortos (como las observaciones nocturnas) el tiempo sidéreo se puede considerar uniforme.

Con este valor  $\theta$  podemos pasar de coordenadas ecuatoriales absolutas a ecuatoriales horarias, y por tanto también a coordenadas horizontales con las expresiones de la sección 5.3.

### 5.6. Coordenadas eclípticas

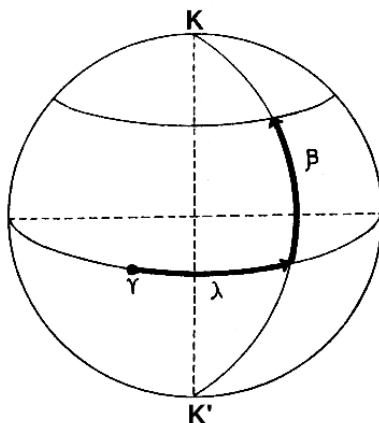


Figura 15: Coordenadas eclípticas

El plano fundamental de este sistema es el **plano de la eclíptica**. A los paralelos al ecuador que pasan por los puntos  $\odot$  y  $\oslash$  se denominan *trópicos*, y los que pasan por  $K$  y  $K'$  *círculos polares*. Los círculos máximos que pasan por  $K$  y  $K'$  son los *coluros*.

Las dos coordenadas eclípticas son:

**Latitud eclíptica ( $\beta$ ):** es el ángulo que forma la visual del astro con el plano de la eclíptica. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $+90^\circ$  en dirección a  $K$  y entre  $0^\circ$  y  $-90^\circ$  en dirección a  $K'$ .

**Longitud eclíptica ( $\lambda$ ):** es el ángulo diedro que forma el coluro origen (que es el que pasa por el punto  $\Upsilon$ ) con el coluro que pasa por el astro. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  contándose en el sentido contrario al movimiento diurno.

El plano de la eclíptica contiene al radio vector que une al Sol con la Tierra y al vector velocidad de ésta, lo que lo hace muy útil. Sin embargo, debido a las anomalías en la rotación de la Tierra este plano no es siempre el mismo, si no que varía en cada instante. De todos modos podemos considerarlo como básicamente constante.

### 5.7. Transformación de coordenadas ecuatoriales absolutas a eclípticas

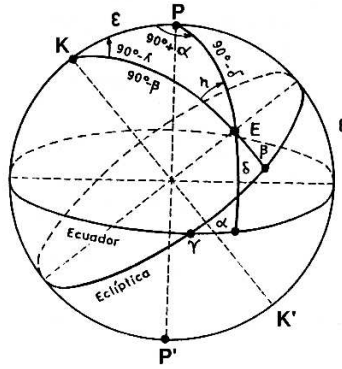


Figura 16: Cambio entre coordenadas eclípticas y absolutas

Para pasar de un sistema de coordenadas al otro observamos que están relacionadas por un ángulo  $\varepsilon$  que resulta ser la oblicuidad de la eclíptica. Al resolver el triángulo esférico que aparece ahí podemos obtener relaciones que permiten pasar de las coordenadas ecuatoriales  $(\alpha, \delta)$  a las coordenadas eclípticas  $(\lambda, \beta)$ :

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \sin \beta &= \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha \end{aligned} \tag{23}$$

Recíprocamente, para pasar de coordenadas eclípticas  $(\lambda, \beta)$  a ecuatoriales  $(\alpha, \delta)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda \\ \sin \delta &= \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda \end{aligned}$$

Estos dos grupos de relaciones son válidos para ambos hemisferios. Además, son de nuevo las mismas relaciones que si se calcula un cambio de coordenadas cartesianas asociadas como rotación (ver apéndice A).

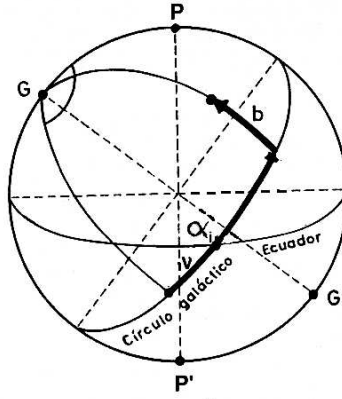


Figura 17: Coordenadas galácticas

### 5.8. Coordenadas galácticas

El plano fundamental de este sistema de coordenadas es el **plano galáctico**. Este plano galáctico se define con el ángulo diedro que forma dicho plano con el ecuador celeste (que es  $I = 62,87^\circ$ ) y con la ascensión recta de uno de los dos puntos donde se interseca  $\alpha_I = 18^h 51^m$ .

Las dos coordenadas galácticas son:

**Latitud galáctica ( $b$ ):** es el ángulo que forma la visual del astro con el plano galáctico. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $+90^\circ$  en dirección a  $P_g$  y entre  $0^\circ$  y  $-90^\circ$  en dirección a  $P'_g$ .

**Longitud galáctica ( $l$ ):** es el ángulo diedro que forma el círculo máximo que pasa por  $P_g$  y el astro con el círculo máximo que pasa por  $P_g$  y el origen de longitud. Este origen se define como un punto situado a una distancia angular  $\nu = 32,88^\circ$  del punto  $\alpha_I$  recorridos en sentido del movimiento diurno aparente sobre el plano galáctico, y apunta hacia el centro de la galaxia. Este valor varía entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  contándose en el sentido contrario al movimiento diurno aparente.

Este sistema es totalmente universal y es el que se emplea generalmente para problemas de mecánica galáctica.

### 5.9. Transformación de coordenadas galácticas a ecuatoriales absolutas

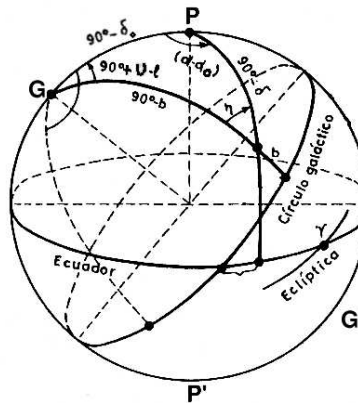


Figura 18: Cambio entre coordenadas galácticas y eclípticas

Para pasar de un sistema de coordenadas al otro observamos que están relacionadas por un ángulo  $90 - \delta_0$  que resulta ser la declinación de  $P_g$ . Al resolver el triángulo esférico que aparece ahí podemos obtener relaciones que permiten pasar de las coordenadas galácticas  $(b, l)$  a las coordenadas eclípticas  $(\alpha, \delta)$ .

No lo calculamos aquí, pues generalmente las coordenadas galácticas no se emplean en cursos de iniciación como este, y de todos modos el método de resolución es análogo a casos anteriores.

## 6. Algunos problemas fundamentales en astronomía de posición

### 6.1. Unidades de distancia

A la hora de expresar distancias en el espacio resulta obvio que el kilómetro se nos queda pequeño. Por esa razón se hace necesario definir nuevas unidades de distancia mayores que él. Las principales son las siguientes:

- Radio terrestre: Es el radio ecuatorial terrestre e igual a  $1RT = 6378,14km$ . Se emplea para referirse a satélites artificiales, sobre todo.
- Unidad astronómica: Es, aproximadamente, el valor del semieje de la órbita de la Tierra en torno al Sol e igual a  $1UA = 149597870km$ . Se usa como escala en el sistema solar.
- Año-luz: Es la distancia que recorre la luz en un año e igual a  $1al = 9,461 \cdot 10^{12}km = 63243UA$ . Se emplea para medir distancias en el universo, más allá del sistema solar. Por ejemplo, el sistema triple de  $\alpha$ -centauro es el más cercano y está a  $4,2al$ .
- Parsec: Ésta es una medida muy técnica y equivalente a  $1Ps = 3,26al$ .

#### 6.1.1. El parsec

Daremos aquí, de un modo simple, la definición de parsec. Cuando tomamos al Sol, la Tierra y un astro cualquiera podemos formar un triángulo que tenga esos tres elementos como vértices. La distancia Tierra-Sol es aproximadamente una unidad astronómica y muy pequeña en relación con la distancia  $d$  entre el Sol y el astro considerado. Si hacemos el dibujo podemos ver como los lados Tierra-Sol y Sol-astro forman un ángulo. Como la Tierra gira en torno al Sol habrá un momento en el que ese ángulo sea recto, con lo que nos queda un triángulo rectángulo. En este triángulo rectángulo definimos el **paralaje estelar**  $\Pi$  como el ángulo que forman los lados astro-Tierra y astro-Sol. Hay que hacer notar que como la distancia  $d$  es muy grande en comparación con la distancia que separa la Tierra del Sol (llamémosla  $a_0$ ), este valor  $\Pi$  va a ser muy pequeño: por ejemplo, para el sistema  $\alpha$ -centauro este valor es inferior al segundo de arco.

Pues bien, el parsec<sup>5</sup> es la distancia  $d$  para la cual  $\Pi = 1''$ . Según esta definición todas las estrellas están a más de un parsec. Por tanto  $\tan \Pi = \frac{a_0}{d}$  que, en aproximación por serie de Taylor a ángulos bajos (como es el caso), nos queda como  $\Pi = \frac{a_0}{d}$  donde  $\Pi$  se expresa en radianes. Por tanto, pasando el valor del paralaje a segundos de arco obtenemos:

$$\Pi = \frac{a_0}{d} \underbrace{\frac{180^\circ}{\pi} 60 \cdot 60}_{N''} \Rightarrow 1'' = \frac{a_0 N''}{1ps} \Rightarrow 1ps = a_0 N = 3,26al$$

### 6.2. Medida del tiempo

El tiempo  $t$  que definimos aquí la consideramos una variable independiente utilizada para referenciar distintos fenómenos físicos. Para su medición necesitamos un fenómeno que se reproduzca de forma periódica y, a ser posible, que esté relacionado con el sol.

Si dividimos la esfera celeste en 24 husos (círculos máximos que pasan por el polo celeste) podemos definir una hora como el tiempo que tarda en pasar de un huso al siguiente (es decir, en recorrer un ángulo horario  $H = 1^h$ ). Pero hay un inconveniente, el Sol no pasa de un huso a otro en el mismo tiempo todos los días del año, esto es debido a que el Sol en su movimiento aparente alrededor de la Tierra orbita formando una elipse, y según la segunda ley de Kepler<sup>6</sup> vemos que el tiempo en recorrer una distancia angular igual no es lineal con el tiempo ( $\theta \neq n_0(t - t_0)$ ).

Haciendo un poco de desarrollo vemos que con ninguna de las relaciones definidas en el tema anterior podemos conseguir una relación lineal entre el tiempo y el ángulo recorrido por el Sol alrededor de

<sup>5</sup>Nombre que viene del inglés **paralax** y **second**

<sup>6</sup>La ley que dice que el radiovector barre áreas iguales en tiempos iguales

la Tierra, lo cual es un problema. Sin embargo podemos recurrir a una estratagema para conseguir nuestro objetivo. Definimos el **sol medio** como un punto imaginario que se mueve sobre el ecuador con velocidad constante (exactamente igual que si se moviese en una órbita circular). Entonces la posición del sol medio en ángulo horario nos viene dado por la **ecuación del tiempo**:

$$ET = H - H_m$$

donde  $H$  es el ángulo horario del sol y  $H_m$  el ángulo horario del sol medio. Para conocer el valor de  $ET$  en cada día véase el apéndice B.

Ésta es una función periódica a lo largo del año y vemos que tiene un máximo absoluto el 14 de noviembre con un valor  $ET = 16^m 26^s$  y un mínimo absoluto el 11 de febrero con un valor  $ET = -14^m 13^s$ .

Por tanto podemos definir los siguientes tiempos, que nos llevarán finalmente a la hora local:

- $H$ : Hora solar verdadera en ángulo horario.
- $H_m$ : Hora solar media ó tiempo solar medio.  $H_m = H - ET$ .
- $H_C$ : Hora ó tiempo civil. Como cuando el sol culmina el tiempo solar medio nos da cero horas, pero es mediodía, definimos  $H_C = H_m + 12^h$ .
- $TU$ : Tiempo universal. Es el tiempo civil del meridiano de Greenwich.  $TU = H_{CG} = H_C - \lambda_{lugar}$ .
- $TO$ : Tiempo oficial. Hora que cada país marca como oficial respecto a la hora de Greenwich. Habitualmente es un número entero de horas respecto al tiempo universal. En España se tiene que  $TO = TU + 1^h$  en horario de invierno y  $TO = TU + 2^h$  en horario de verano.

Una vez definido el sol medio podemos definir el *día solar medio* como el intervalo de tiempo que tarda el sol medio en pasar dos veces consecutivas por un círculo máximo.

El *día sidéreo* se define de igual modo, pero con el punto  $\Upsilon$ , no con el sol medio. Hay que hacer notar que estos dos días no son iguales, ya que mientras el punto  $\Upsilon$  tarda unos 26000 años en dar una vuelta completa a la eclíptica el sol medio (por tener movimiento propio **apreciable** tarda un año en dar una vuelta al ecuador).

Definimos el *año trópico* como el intervalo de tiempo desde que el sol verdadero está en el punto aries hasta que vuelve a estarlo. Un año trópico son 365,2422 días medios y 366,2422 días sidéreos, puesto que al cabo de un día el punto  $\Upsilon$  llega antes al círculo máximo que el Sol verdadero, ya que tiene movimiento propio en el sentido contrario, este desfase que es de aproximadamente 3,94 minutos al día se va acumulando, y cuando vuelven a coincidir el Sol y el punto  $\Upsilon$ , éste último dio una vuelta más.

El período sinódico es el tiempo invertido desde que dos planetas están alineados con el Sol (oposición) hasta que vuelven a estarlo. Se puede demostrar que, en el caso particular de la Tierra, ese valor  $S$  cumple la igualdad  $\frac{1}{S} = \left| \frac{1}{P_T} - \frac{1}{P} \right|$ , donde  $P_T$  es el período de la Tierra y  $P$  el período del otro planeta.

### 6.3. Cuadrantes solares: construcción de relojes de Sol

Un reloj de sol es un instrumento que nos permite medir la hora solar verdadera mediante una varilla que proyecta una sombra sobre un plano. Esta varilla está orientada de un modo muy concreto: paralela al eje de rotación de la Tierra. El plano puede tener, en general, cualquier orientación, pero normalmente coincide bien con el ecuador, bien con el horizonte o bien con un vertical (una pared).

El reloj de sol es, pues, una aplicación entre el ángulo horario del Sol verdadero y las marcas correspondientes en el plano de proyección, veamos cómo hay que dibujar esas marcas para saber cuándo el sol avanzó una hora.

#### 6.3.1. Cuadrante ecuatorial

En este caso es muy simple, una vez determinada la marca inicial que proyecta la sombra a las 12 horas sólo hay que trazar una marca cada  $15^\circ$  (que era una hora) en ambas direcciones.

### 6.3.2. Cuadrante horizontal

En este caso para saber cada cuántos grados hay que hacer la marca se resuelve un triángulo esférico que da como solución  $\tan x = \sin \phi \tan H$ , donde  $\phi$  es la latitud del lugar y  $H$  va tomando los valores  $\pm 1^h, \pm 2^h \dots$  dependiendo de donde se encuentre el Sol. Hay que hacer notar que  $x_2 \neq 2x_1$  en general.

### 6.3.3. Cuadrante vertical (muro declinante)

Al resolver el triángulo esférico en este caso tenemos que  $\cot x = \frac{\cot H \sin A - \sin \phi \cos A}{\cos \phi}$ . Donde  $\phi$  es la latitud del lugar,  $H$  el ángulo horario del Sol y  $A$  el azimut del muro. Las marcas en este reloj son asimétricas en general. Hay un caso especial que es cuando el reloj de sol está orientado según el primer vertical ( $A = 90^\circ$ ). En ese caso las marcas son simétricas y siguen la fórmula  $\cot x = \frac{\cot H}{\cos \phi}$ .

## 6.4. Movimiento geocéntrico de los planetas

Decimos que dos astros están en conjunción cuando, vistos desde la Tierra,  $\alpha = \alpha'$  o  $\lambda = \lambda'$ . Decimos que están en oposición cuando  $\alpha - \alpha' = 12^h$  o  $\lambda - \lambda' = 180^\circ$ . Por último, decimos que están en cuadratura cuando  $\alpha - \alpha' = 6^h$  o  $\lambda - \lambda' = 90^\circ$ .

Si las órbitas de los planetas alrededor del Sol están en el mismo plano (lo que es bastante aproximado, excepto para Plutón y algo para Mercurio) que un planeta y el Sol estén en conjunción o en oposición implica que están alineados, ocupando la Tierra un extremo o el centro, respectivamente. Es obvio que los planetas interiores nunca pueden estar en oposición, pero sí que presentan dos tipos de conjunción: la superior (el Sol está entre la Tierra y el planeta) y la inferior (el planeta está entre la Tierra y el Sol). Los planetas exteriores presentan una conjunción y una oposición.

Obviamente, para observar un planeta exterior lo mejor es que esté en oposición, pues en ese caso el Sol está del otro lado de la Tierra, con lo que es de noche y además el planeta y la Tierra están más próximos. Los planetas interiores se ven mejor cuanto más lejos estén del Sol, y esto es cuando el ángulo que forman el Sol, la Tierra y el planeta (llamado elongación ( $\Sigma$ )) es máximo. La elongación máxima para Mercurio es aproximadamente  $\Sigma \simeq 23^\circ$  y para Venus es  $\Sigma \simeq 46^\circ$ . Este ángulo es el ángulo de separación que vemos entre el Sol y el planeta, por eso Venus y Mercurio no se pueden ver a media noche<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>Y por eso fueron llamados antiguamente como estrellas del amanecer o estrellas vespertinas, sólo se ven al amanecer y al atardecer.

## A. Transformaciones de coordenadas mediante rotaciones

### A.1. Coordenadas horizontales y horarias

Las coordenadas cartesianas equivalentes a las coordenadas horizontales son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos A \cos h \\ \sin A \cos h \\ \sin h \end{pmatrix}$$

y las equivalentes a las coordenadas ecuatoriales horarias son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos H \cos \delta \\ \sin H \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

Para pasar de las coordenadas horizontales a las horarias vemos que no hay más que hacer que realizar un giro de  $(90 - \Phi)$  en sentido positivo alrededor del eje  $x$ , con lo cual:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \Phi & 0 & \cos \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Expresión que nos lleva a las transformaciones obtenidas en la sección 5.3. Para obtener las relaciones que nos permiten calcular las coordenadas horizontales a partir de las horarias no hay que hacer más que multiplicar por la izquierda por la inversa de la matriz de giro a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \Phi & 0 & -\cos \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

### A.2. Coordenadas absolutas y eclípticas

Las coordenadas cartesianas equivalentes a las coordenadas absolutas son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

y las equivalentes a las coordenadas eclípticas son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

Para pasar de las coordenadas ecuatoriales absolutas a las eclípticas vemos que no hay más que hacer que realizar un giro de  $\varepsilon$  en sentido positivo alrededor del eje  $x$ , con lo cual:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Expresión que nos lleva a las transformaciones obtenidas en la sección 5.7. Para obtener las relaciones que nos permiten calcular las coordenadas absolutas a partir de las eclípticas no hay que hacer más que multiplicar por la izquierda por la inversa de la matriz de giro a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

### A.3. Coordenadas galácticas y eclípticas

Sabiendo las coordenadas  $(\alpha_0, \delta_0)$  del punto  $P_g$  podemos pasar de un sistema de coordenadas al otro mediante una rotación de tres giros: primero giramos un ángulo  $\alpha_0$  en torno al eje  $z$  en el sentido positivo; después giramos un ángulo  $\omega = 90 - \delta_0$  en torno al eje  $y$  en el sentido positivo y por último giramos  $\theta = 90 - \nu$  de nuevo en el sentido positivo del eje  $z$ .

Las coordenadas cartesianas equivalentes a las coordenadas galácticas son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b \cos l \\ \sin b \cos l \\ \sin l \end{pmatrix}$$

y las equivalentes a las coordenadas absolutas son: equivalentes a las coordenadas absolutas son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

Por tanto, para pasar de coordenadas absolutas a coordenadas galácticas empleamos la expresión matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & 0 & -\sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega & 0 & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & 0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

## B. Ecuación del tiempo

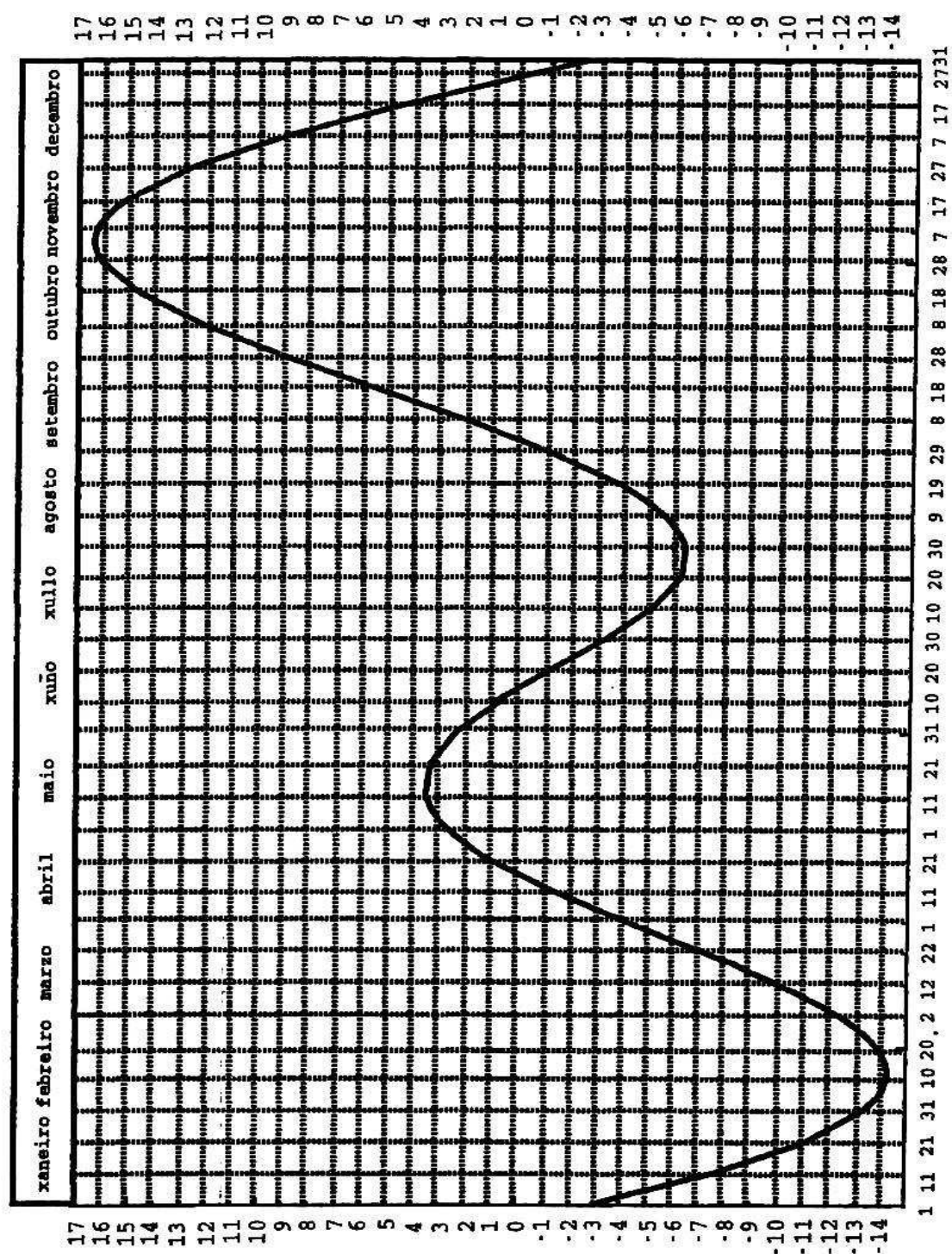


Figura 19: Ecuación del Tiempo= $H - H_m$